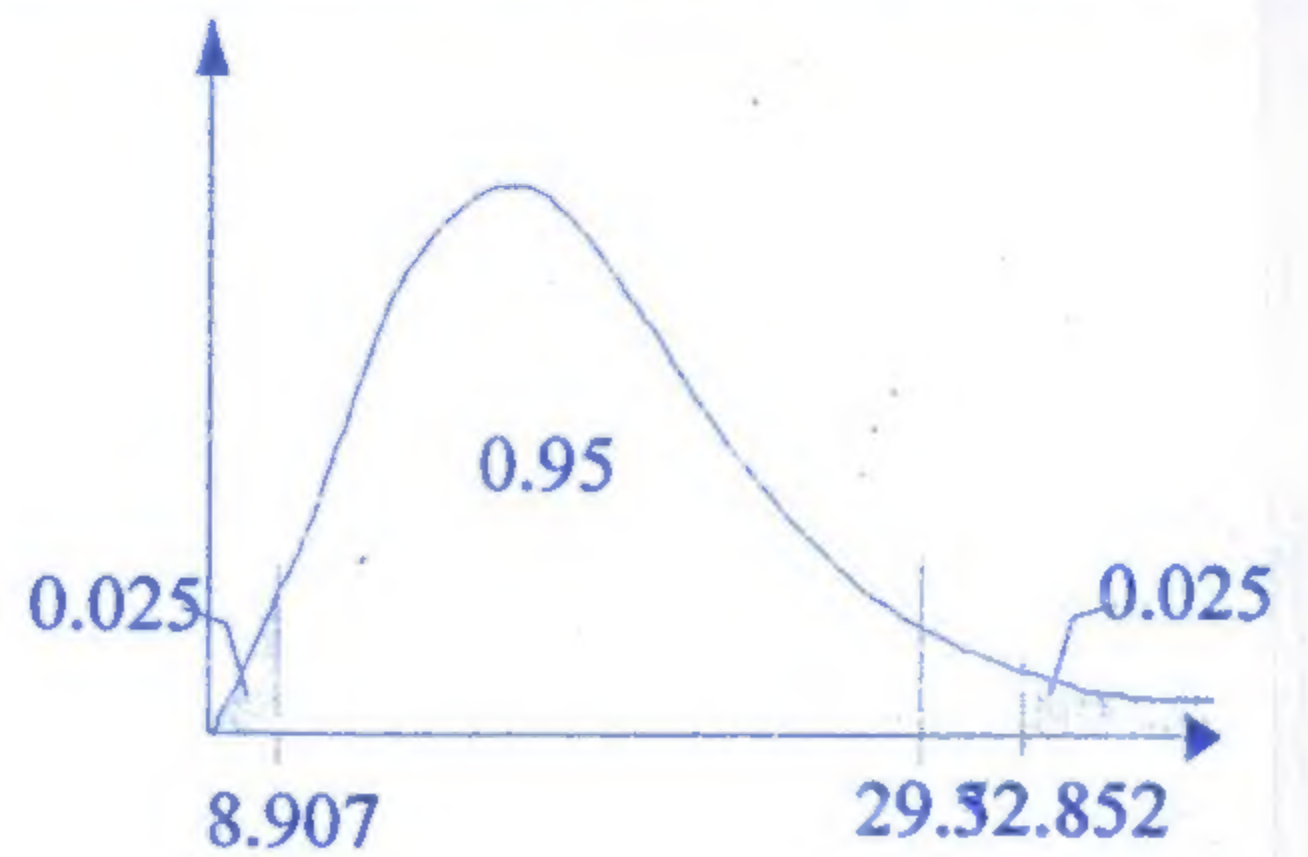
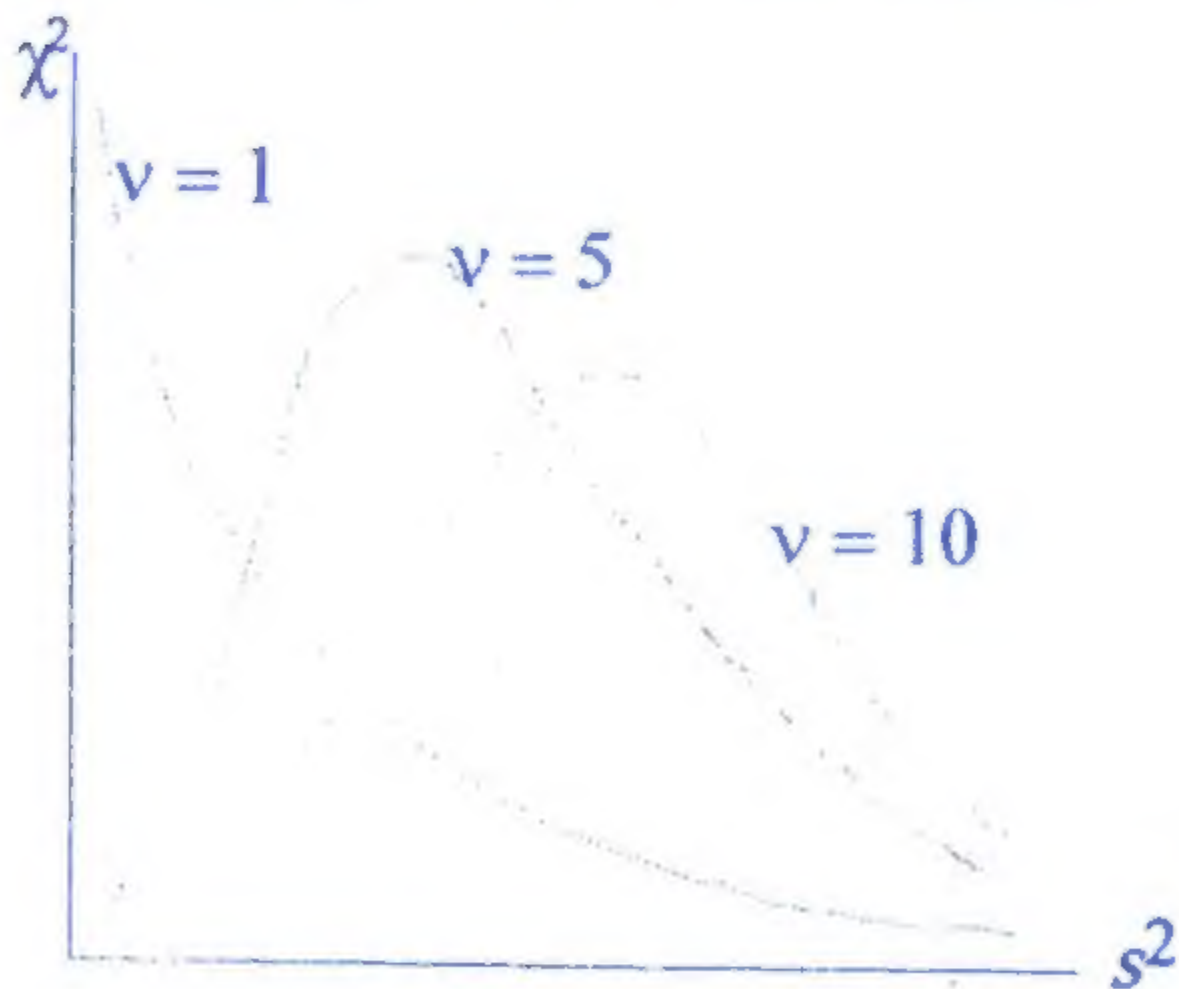
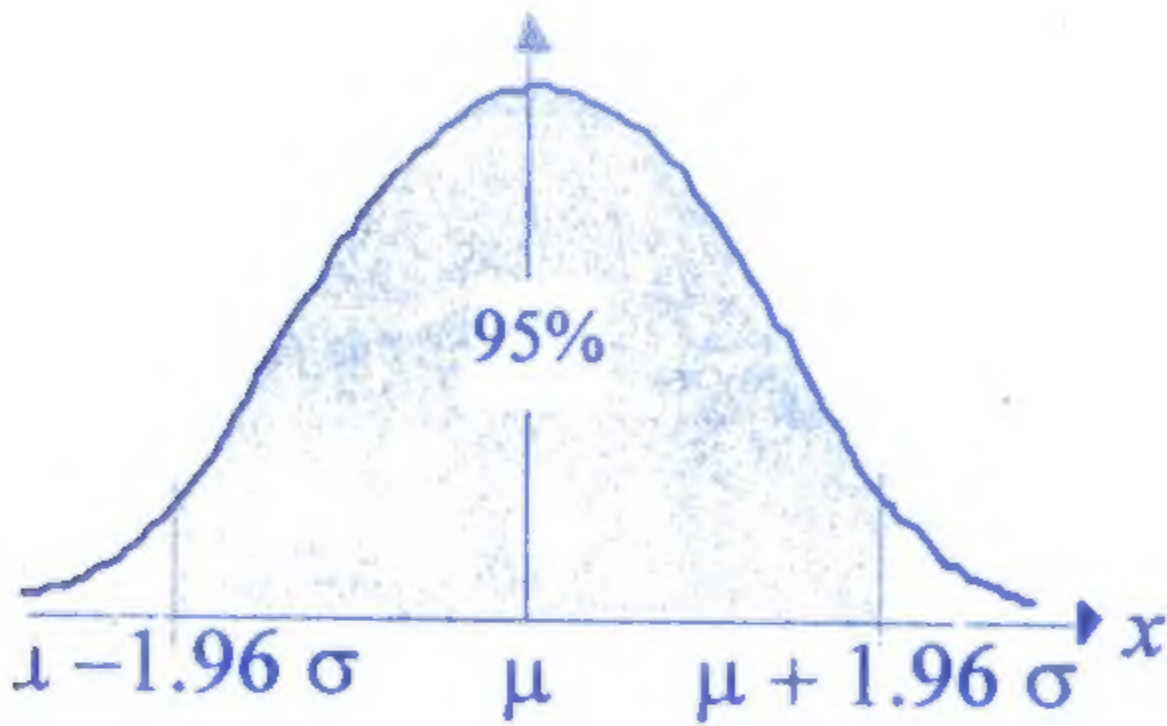
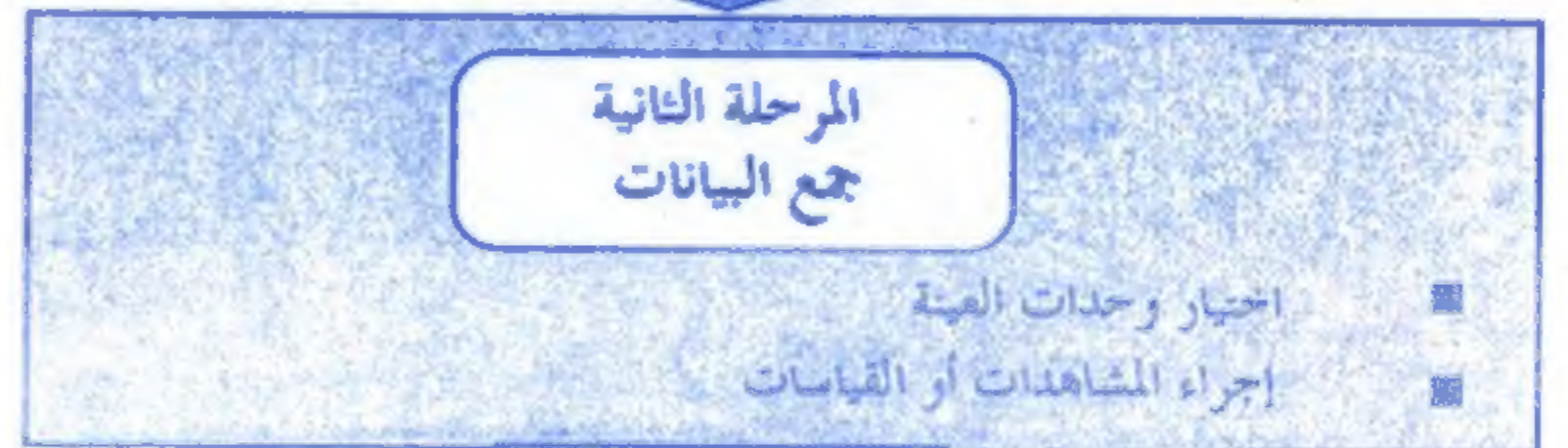
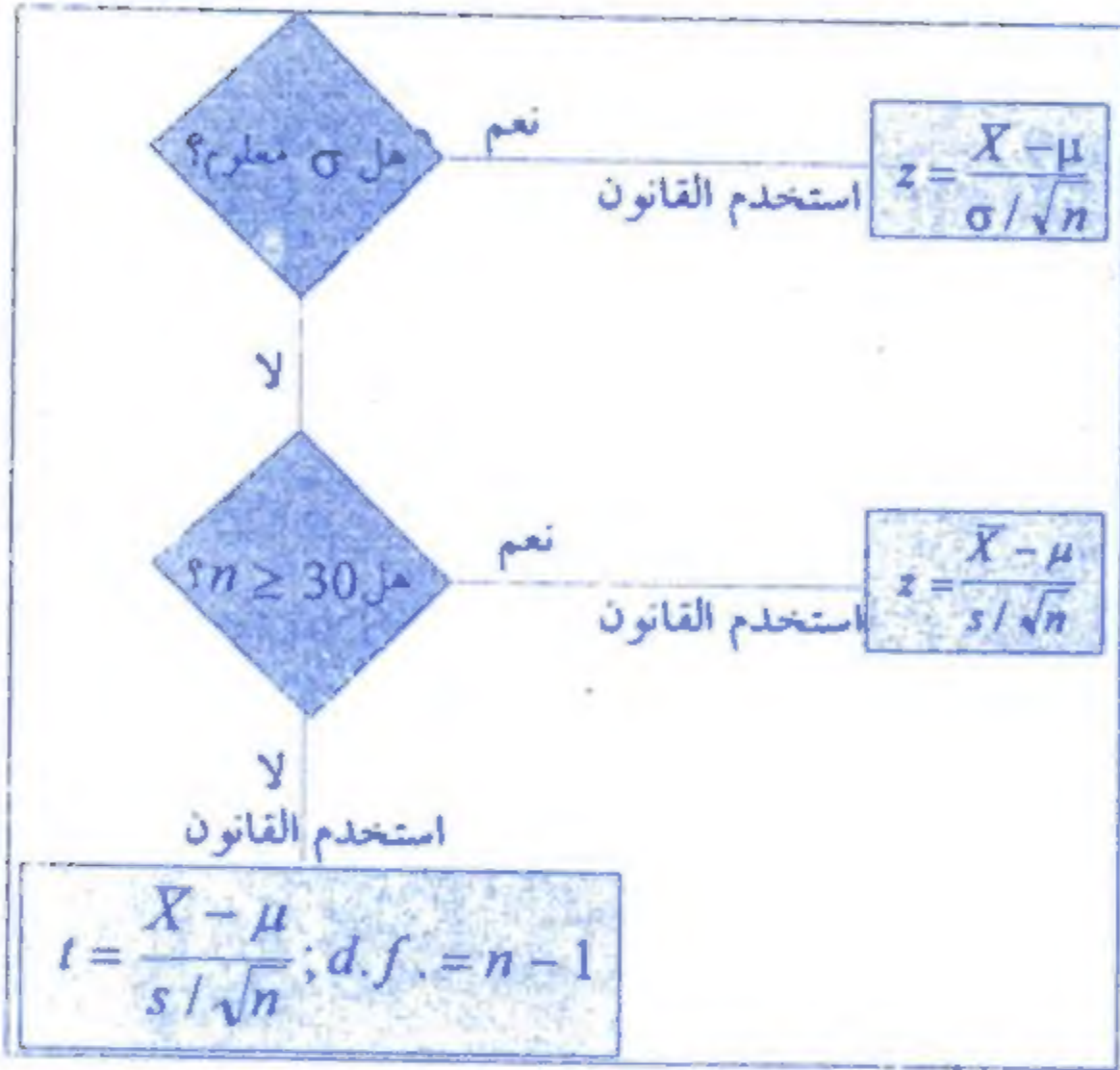


# دروس في الإحصاء التطبيقي

إعداد

أ.د. علي نصر السيد الوكيل





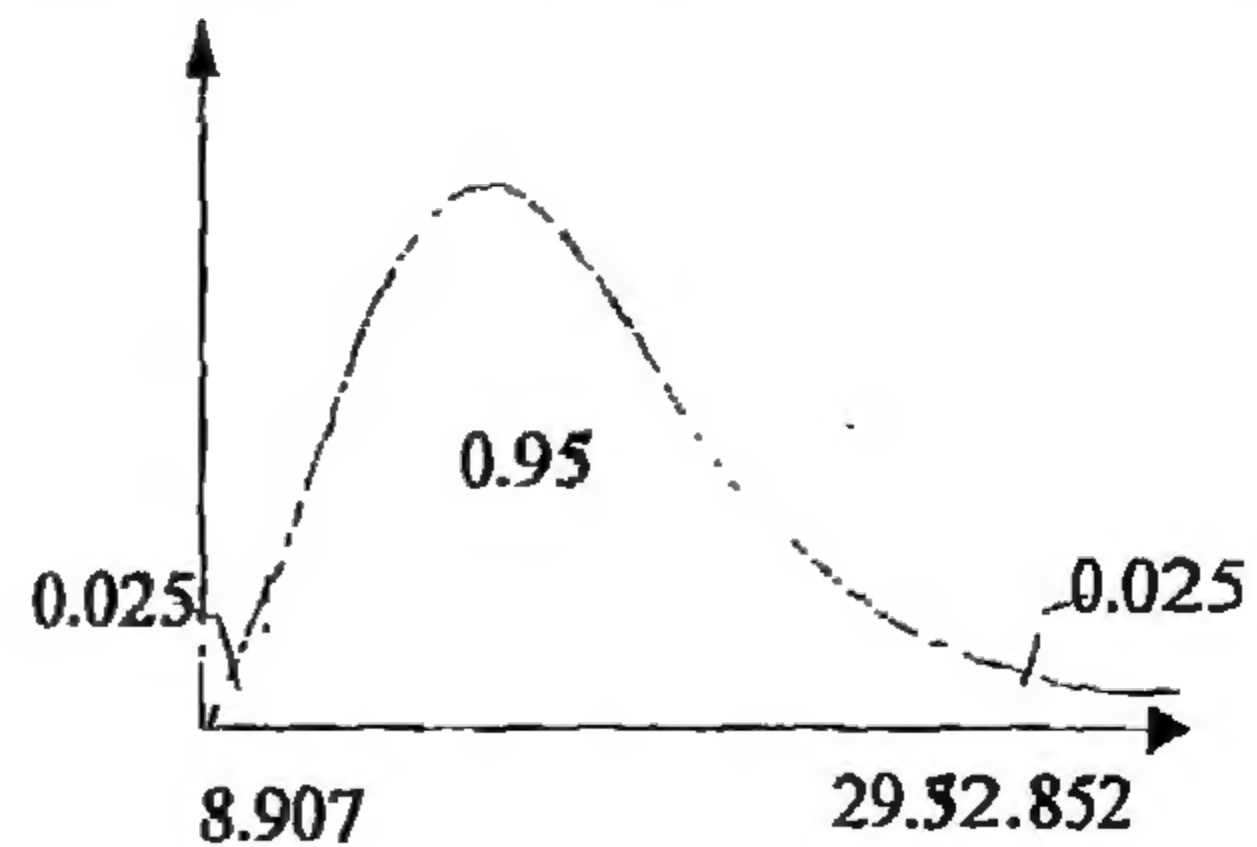
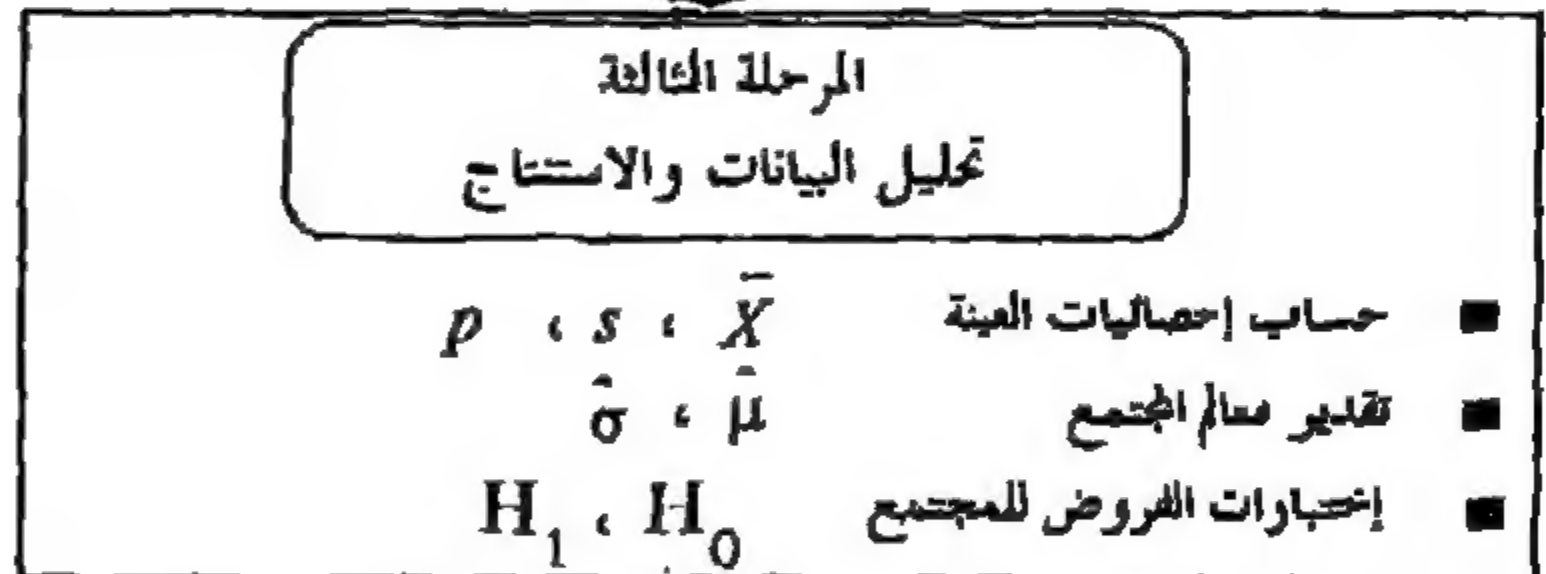
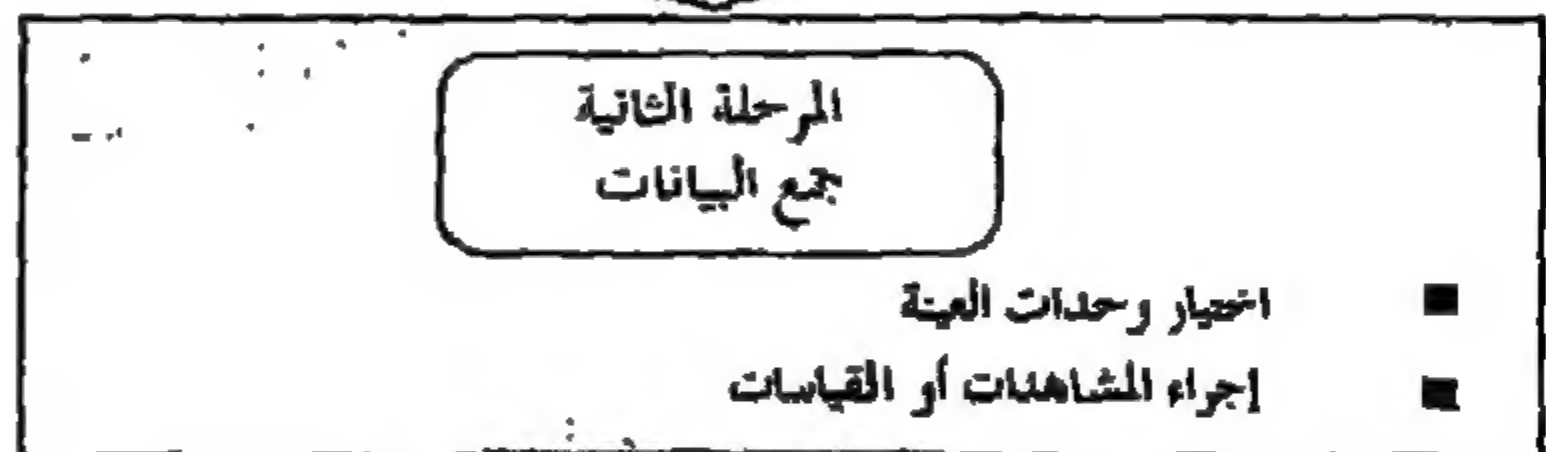
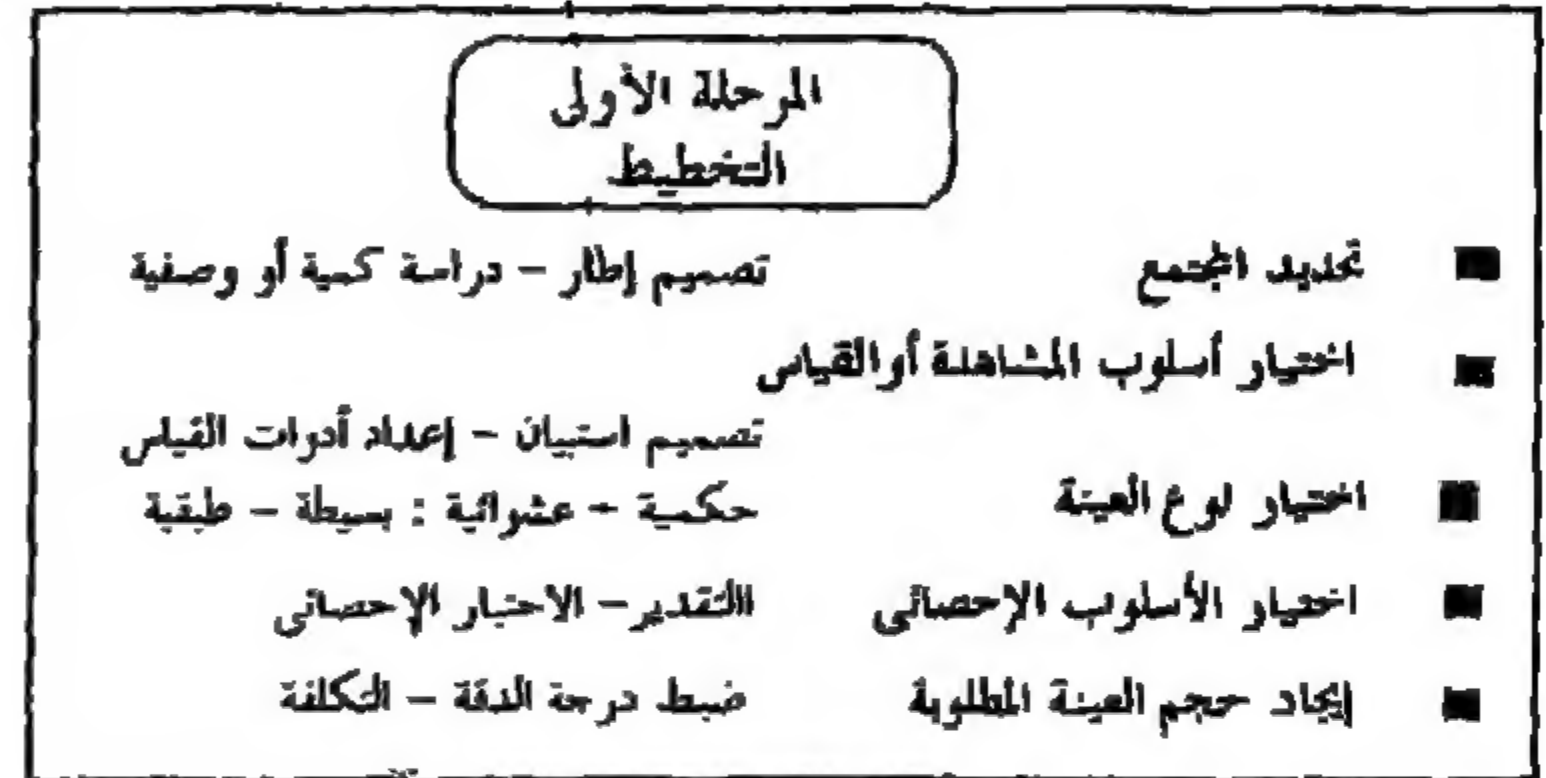
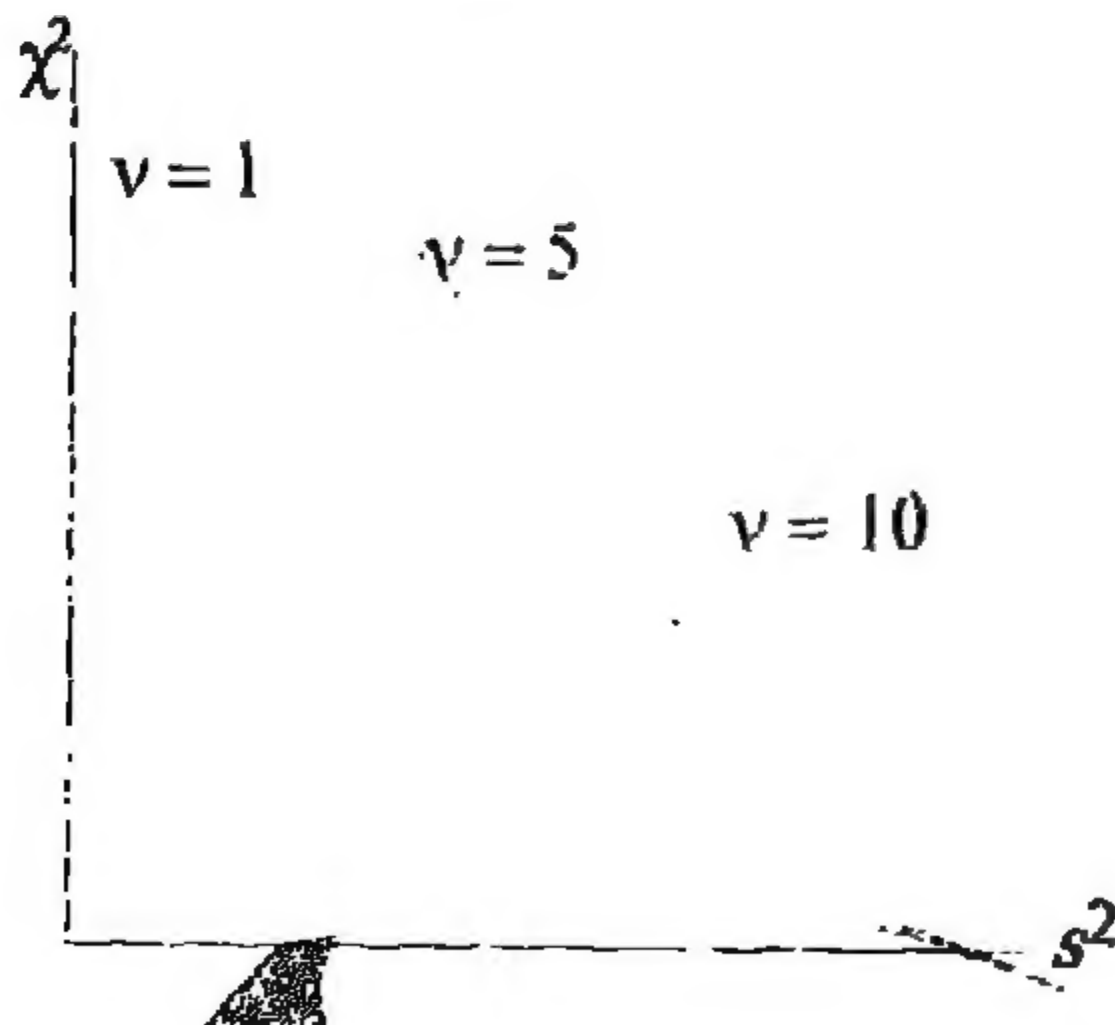
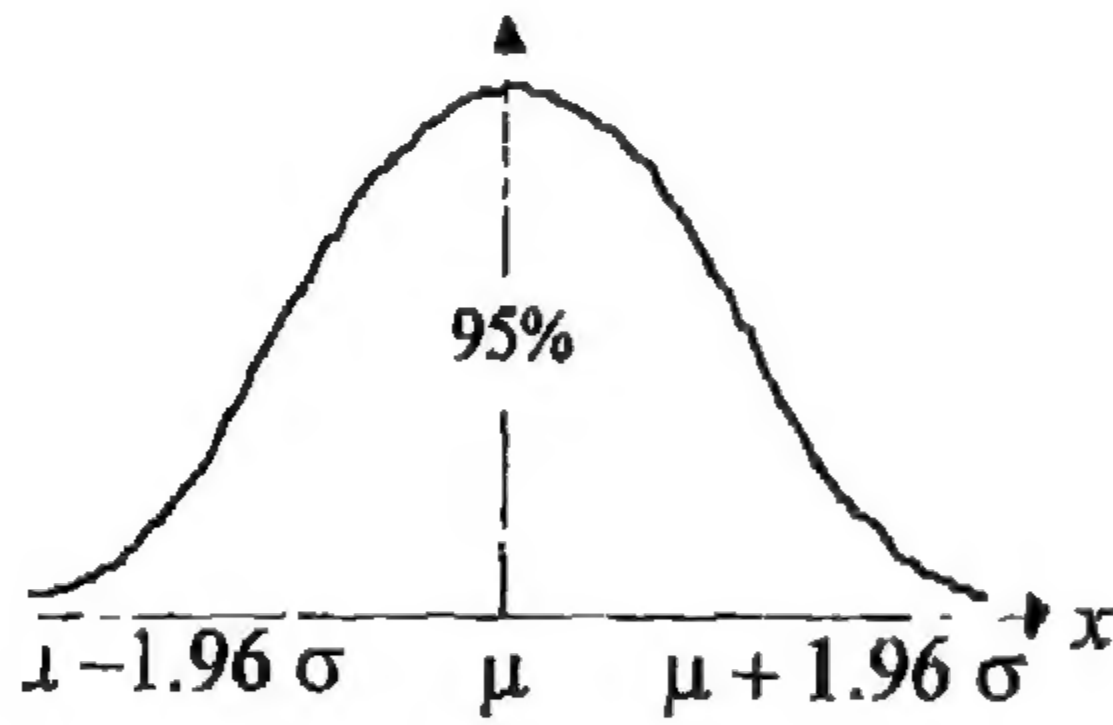
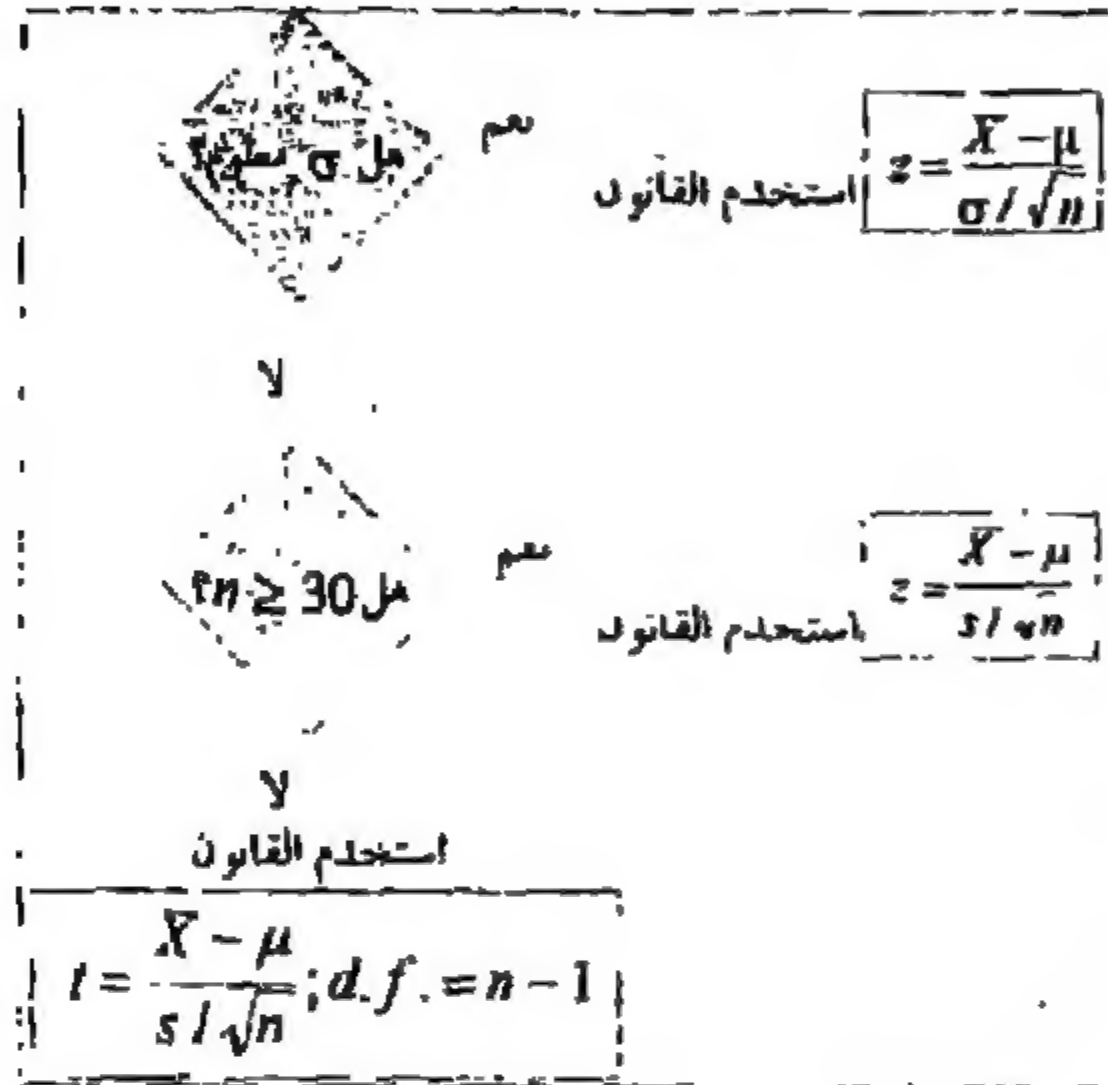


دروس في

# الإحصاء التطبيقي

إعداد

أ.د. علي نصر السيد الوكيل



رقم الإيداع

٢٠١٠ / ١٩٠١١

دار المصطفى للطباعة

بنتها الجديدة ت: ٠١٣/٢٢٢٨٢٦٠

# الدرس الأول طرق المعاينة

## SAMPLING TECHNIQUES

### ١-١ المجتمع والعينة Population and Sample

يقصد بتعبير المجتمع في علم الإحصاء مجموعة من الوحدات (أفراد - أشياء - عمليات - أحداث ... إلخ)؛ فمثلاً:

- مجموعة الموظفين في شركة من الشركات تُكوّن مجتمعاً.
  - كل المواطنين المسجلين في كشوف الانتخاب في دائرة من الدوائر يُكوّنون مجتمعاً.
  - كل السيارات من طراز معين تُكوّن مجتمعاً.
  - كل المشتريين لمنتج معين يُكوّنون مجتمعاً.
  - مجموعة فئران التجارب في معمل من المعامل البيولوجية تُكوّن مجتمعاً.
  - مجموعة العمليات البنكية في شهر من الشهور تُكوّن مجتمعاً.
- فإذا كان المجتمع الذي نود دراسته إحصائياً ذا حجم صغير فإنه من الممكن أن نقيس متغيراً ما لكل وحدات المجتمع ونسمي نتيجة تلك القياسات تعداداً *census*.

من جهة أخرى إذا كان حجم المجتمع قيد الدراسة كبيراً أو صعب الوصول إلى كل وحداته أو بعضها فإننا نلجأ عندئذ إلى اختيار جزء صغير (مجموعة جزئية) منه ممثلاً للمجتمع يسمى عينة *sample* ونقصر قياساتنا على وحدات (عناصر) تلك العينة.

ولكى نعمم نتائج قياساتنا للعينة على المجتمع بأكمله نستخدم ما يسمى بـ الإحصاء الاستدلالي *inductive statistics (inferential statistics)*. وبالطبع فإنه من الأرخص والأسرع قياس جزء من المجتمع بدلاً من كل المجتمع ولكن يجب أن نكون على حذر من اختيار عينة غير ممثلة للمجتمع.

### ٢-١ دواعي اتخاذ عينة Incentives for Taking a Sample

توجد دواع لاتخاذنا عينة بدلاً من المجتمع بأكمله. من هذه الدواعي ما يلي:

#### الاقتصاد

لا شك أن أخذ قياسات على جزء من المجتمع أقل تكلفة من أخذ تلك القياسات على كل المجتمع؛ فمثلاً إرسال استبيان لكل المتعاملين مع شركة تجارية حول منتج جديد يكلف الشركة نفقات طبع الاستبيان وإرساله بالبريد وفرز الردود وتبويبها فضلاً عن احتمال إهمال جزء كبير من العملاء للرد على الاستبيان. وبالطبع تقل تلك النفقات عند اختيار عينة تمثل عملاء الشركة تمثيلاً جيداً.



## الوقت

أحيانا يكون عامل الوقت مُهمًا إذ قد تُلزم ظروف المناقشة اتخاذ قرار طرح منتج جديد بناء على معلومات من عينة محدودة بدلا من انتظار ردود كل العملاء.

## حجم المجتمع

بعض المجتمعات الإحصائية تكون ذا حجم ضخم لا يمكن معه إجراء إحصاء شامل على المجتمع بأكمله؛ فمثلا مجتمع طلاب المرحلة الثانوية في دولة معينة يكون ذا حجم كبير قد لا يمكننا معه إجراء استقصاء لكافة ميولهم وتوجهاتهم المستقبلية وما يترتب على ذلك من ترتيبات للتخطيط لمستقبلهم. لذا يكفي هنا أخذ عينة ممثلة لهذا المجتمع.

## صعوبة الوصول لبعض مفردات المجتمع

بعض المجتمعات تحتوى عناصر يصعب مشاهدتها أو إجراء قياسات عليها. فمثلا عند دراسة ميول المستهلكين لبعض المنتجات لا يمكن استبيان كل المتوقع استخدامهم لتلك المنتجات؛ فمنهم من يكون داخل وحدات عسكرية أو فى السجون أو داخل مستشفيات.

## الطبيعة المدمرة لبعض المجتمعات

فى بعض الأحيان تكون مشاهدة أو قياس عناصر مجتّع ما لا يتحقق إلا بتدميرها؛ فمثلا اختبار صلاحية رصاصات البنادق أو رؤوس الصواريخ لا يمكن إجراؤه إلا بإطلاقها، قياس أعمار المصابيح الكهربائية لا يكون إلا باستخدامها فعلا. لذا تؤخذ عينة من كل دفعة من الإنتاج وتختبر ثم تعمم نتائج الاختبار على كل الإنتاج.

## الدقة

أحيانا يكون إجراء إحصاء شامل لكل عناصر مجتّع ما بغير عناية كافية ربما يؤدي إلى معلومات خاطئة عن المجتمع؛ فمثلا عمل إحصاء لأفراد مدينة ما بهدف تقدير الدعم الحكومى للمواد التموينية بدون التحقق من صحة الوثائق ربما يدفع بعض الأسر بإعطاء بيانات مبالغ فيها، بينما أخذ عينة مختارة بعناية وإجراء القياسات عليها يعطى معلومات أكثر دقة.

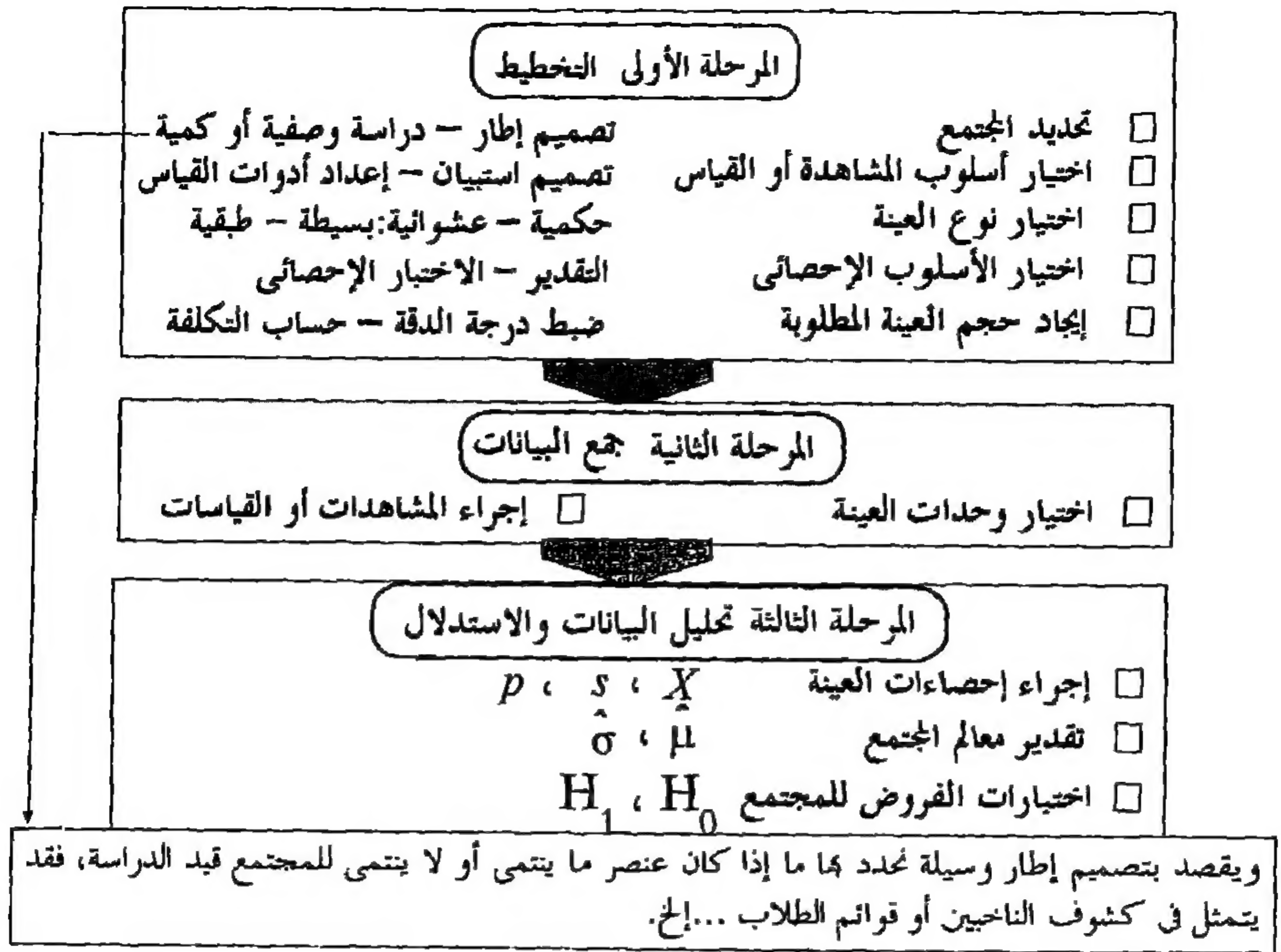
## ٣-١ إجراء الدراسة للمعينة Conducting a Sample Study

حتى نحصل على الفائدة المرجوة من إجراء المعينة تلزمنا ثلاث مراحل متعاقبة وهى:

➤ المرحلة الأولى : التخطيط للمعينة.

➤ المرحلة الثانية : جمع البيانات

➤ الموحلة الثالثة : تحليل البيانات والاستدلال. ↪



ورغم أهمية تحديد إطار للمجتمع، إلا أنه في بعض المجتمعات قد يكون اختيار إطار صعباً أو مستحيلاً؛ فمثلاً مجتمع المترددين على إحدى الدوائر الحكومية، مجتمع المدخنين في دولة ما... إلخ.

#### ٤.١ خطأ المعاينة Sampling Error

باختيارنا عينة مناسبة نتوقع أن تعكس هذه العينة خصائص المجتمع الذي تمثله. ومع ذلك لا يوجد ضمان أن العينة تمثل المجتمع تمثيلاً تاماً. ويعتبر خطأ المعاينة السبب الرئيسي في عدم تمثيل العينة للمجتمع تمثيلاً تاماً. وهذا الخطأ ينشأ من عاملين هما:

##### ◆ الصدفة Chance

قد تلعب الصدفة دوراً كبيراً في خطأ المعاينة، ولنضرب لذلك مثلاً: لنفرض أننا دخلنا نادياً من النوادي الرياضية وأردنا أن نحسب متوسط أطوال الشباب في هذا النادي واختارنا مجموعة من الشباب بطريقة عشوائية وتصادف أن هؤلاء الشباب في فريق كرة السلة، ففي هذه الحالة يكون متوسط الأطوال المقاسة أكبر من المتوسط الحقيقي لأطوال شباب النادي.

##### ◆ التحيز Bias

التحيز في اختيار عينة هو الميل لتفضيل فئة معينة من فئات المجتمع. وينشأ التحيز عادة من سوء التخطيط للمعاينة، ولنضرب لذلك مثلاً: لنفرض أن شركة من الشركات تريد استطلاع رأي جمهور المتعاملين معها في منتج غذائي جديد. من السهل على الشركة أن ترسل مندوبين لاستطلاع رأي ربات البيوت في هذا المنتج. ولكن هذا الاختيار يعتبر اختياراً منحازاً حيث تمثل العينة المختارة نسبة ضئيلة من جمهور المتعاملين فضلاً عن أن من بيده اتخاذ قرار الشراء ليس دائماً في أيدي ربات البيوت.



## ٥-١ اختيار العينة Selecting Samples

إن اتباع أسلوب معين لاختيار عينة من مجتمع يعتمد على عاملين أساسيين هما تجنب الخطأ وتوفير النفقات. وهذين العاملين على طرفي نقيض بمعنى أن زيادة الدقة لتجنب الخطأ تستلزم إنفاقاً أكثر، كما أن الحرص على توفير النفقات يؤدي إلى دقة أقل. هذا، وتوجد طريقتين رئيسيتين لاختيار العينة وهما:

➤ الطريقة العشوائية Random Sampling.

➤ العينة الحكيمة Judgment Sampling.

### ١-٥-١ العينة العشوائية وطرق اختيارها Random Sample and its Techniques

في هذه الطريقة يكون لكل عناصر المجتمع فرصاً متساوية لأن يكونوا داخل العينة. أي أن احتمال اختيار أي عنصر ليكون داخل العينة يكون ثابتاً. وتتشعب طرق اختيار عينة عشوائية إلى الآتي:

#### (أ) الطريقة العشوائية البسيطة Simple Random Sampling

هذه الطريقة هي الأبسط والأكثر استخداماً وهي الأساس لما يليها من الطرق. وتتلخص هذه الطريقة في عمل طريقة لكل عنصر من عناصر المجتمع وتخلط الورقات وتوضع في سلة ونسحب عدداً من الورقات واحدة بعد أخرى بدون إحلال وبذلك تكون لكل عنصر باق بعد أي سحبة نفس احتمال اختياره بعد ذلك. هذا إذا كان حجم المجتمع صغير نسبياً.

أما إذا كان حجم المجتمع كبيراً فإننا نلجأ إلى استخدام جدول الأرقام العشوائية *random number tables*؛ فمثلاً الجدول الآتي يمثل أعداداً عشوائية كل منها مكون من خمسة أرقام:

عمود صف	1	2	3	4	5	6
1	10480	15011	01536	02011	81647	91646
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782
6	77921	06907	11008	42751	27756	53498
7	99562	72905	56420	69994	98872	31016
8	96301	91977	05463	07972	18876	20922
9	89579	14342	63661	10281	17453	18103
10	85475	36857	53342	53988	53060	59533
11	28918	69578	88231	33276	70997	79936
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488



لكي نختار عينة من عشرة عناصر من مائة عنصر نعطي كل عنصر عدداً مكون من رقمين من 00 إلى 99 ثم نختار عشرة من تلك الأعداد بأن نبدأ من أي موضع من الجدول كالاتي:

عمر صف	1	2	3	4	5	6
1	10480	15011	01536	02011	81647	91646
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782
6	77921	06907	11008	42751	27756	53498
7	99562	72905	56420	69994	98872	31016
8	96301	91977	05463	07972	18876	20922
9	89579	14342	63661	10281	17453	18103
10	85475	36857	53342	53988	53060	59533
11	28918	69578	88231	33276	70997	79936
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488

ثم بعد ذلك نأخذ أول رقمين من اليمين أو من اليسار مع مراعاة عدم التكرار كالاتي:

46573
48360
93093
39975
06907
72905
91977
14342
36857
69578

وبذلك تكون الأعداد المختارة كعينة هي :

46 ، 48 ، 93 ، 39 ، 06 ، 72 ، 91 ، 14 ، 36 ، 69

(ب) الطريقة المنظومية Systematic Sampling

إن التطبيق العملي للطريقة العشوائية البسيطة يتمثل في وجود إطار ويتوقف على حجم المجتمع. وتعتبر الطريقة المنظومية تقريباً جيداً لتلك الطريقة؛ فمثلاً إذا أردنا أن نختار عينة حجمها ٢٥ من مجتمع حجمه ١٠٠٠ فإننا نحسب المعامل:

$$k = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{1000}{25} = 40$$

وعليه نختار العناصر بفارق ٤٠ بينها. فلنفرض أننا اخترنا أول عنصر ليكون رقم 31 فيكون العنصر التالي رقم 71، والذي تليه رقم 111، والذي تليه رقم 151، ... وهكذا. ويجب أن نتجنب الرتبة لئلا نوضع قاعدة قد تستغل استغلالاً سيئاً.

### (ج) الطريقة الطبقيّة Stratified Sampling

مع أن دقة نتائج العينة تزداد بازدياد حجمها إلا أن ذلك يتطلب زيادة في النفقات. وتعتبر الطريقة الطبقيّة وسيلة من وسائل زيادة دقة النتائج بدون زيادة حجم العينة. وهذه الطريقة تضمن التمثيل الجيد للعينة لكل طبقات وشرائح المجتمع.

وتعتبر العينة الطبقيّة *stratified sample* أكثر تمثيلاً للمجتمع حيث يُقسّم المجتمع إلى طبقات *strata* ثم تختار من كل طبقة عينة عشوائية بحيث يتناسب عدد الوحدات التي تختار من كل طبقة مع عدد الوحدات داخل تلك الطبقة. ويكون ويكون معامل التناسب ثابت في كل الطبقات. أي أن:

$$k = \frac{\text{حجم العينة في كل طبقة}}{\text{الحجم الكلي للطبقة}} \quad (k \text{ ثابت})$$

مثال

لنفرض أننا نريد اختيار عينة من 400 موظف بشركة يبلغ حجم الموظفين بها 6000 موظف لاتباع نظام جديد للأجور بناء على الإنتاج. وليكن العاملان المؤثران في الاختيار هما درجة المهارة والجنس وليكن الجدول الآتي ممثلاً للتقسيم المطلوب:

المجموع	أنثى	ذكر	
2730	330	2400	ماهر
1950	660	1290	نصف ماهر
1320	1020	300	غير ماهر
6000	2010	3990	المجموع

$$k = \frac{400}{6000} = \frac{1}{15}$$

إذن يكون مطلوباً أن نأخذ من كل طبقة من حجمها، وبذلك نستطيع تكوين الجدول التالي لحجم المأخوذ للعينة من كل طبقة:

المجموع	أنثى	ذكر	
182	22	160	ماهر
130	44	86	نصف ماهر
88	68	20	غير ماهر
400	134	266	المجموع



### (د) طريقة التجمعات Cluster Method

فى هذه الطريقة لا تختار العناصر بطريقة فردية ولكن على هيئة تجمعات *clusters*. فمثلا إذا أردنا أخذ عينة من مدينة كبيرة يكون من المناسب أن تقسم المدينة إلى أحياء، وكل حي يقسم إلى مناطق وكل منطقة إلى شوارع... وهكذا. ثم نختار حيا أو اثنين عشوائيا ومن كل حي منهما نختار منطقة عشوائيا ومن كل منطقة نختار شارعا عشوائيا وبذلك يسهل علينا اختيار العينة التى تؤخذ من أماكن متجاورة فتتخفف النفقات ويختصر الوقت. ويستحسن أن يراعى هنا أن العناصر النهائية تكون غير متشابهة وإلا فلا تتحقق العشوائية.

### (هـ) المعاينة على مراحل Multistage Sampling

هذه الطريقة هى امتداد لطريقة التجمعات وتستخدم عندما يكون حجم المجتمع الذى تختار منه العينة ضخما ومتراعى الأطراف. فمثلا إذا أردنا أن نستطلع رأى الجمهور على مستوى دولة بأكملها فى جريدة جديدة فإننا نختار عددا محدودا من المحافظات والمدن يراعى فيها أن تكون ممثلة للظروف السكانية والمناخية المختلفة، ثم نختار من كل محافظة أو مدينة منها حيا من الأحياء، ومن كل حي شارع... وهكذا ونطلق الاستبيان فى العينة المختارة نهائيا.

### ٢-٥-١ العينة الحكمية Judgment Sample

فى هذه الطريقة يقرر أخذ العينة مسبقا العوامل المرجحة لاختيار عناصر العينة. وتتخذ هذه الوسيلة عندما يكون المجتمع على درجة عالية من عدم التجانس أو عندما تحكم الظروف بأخذ عينة صغيرة أو عندما يتطلب الأمر توافر خبرات معينة فى أخذ القياسات. ومن الواضح أن الطريقة الحكمية أقرب ما تكون إلى التحيز لذا لا تلجأ إليها إلا عند الضرورة.

وفى المعاينة الحكمية فإن القائم بالمعاينة يقرر مسبقا ما هى العوامل التى على أساسها يختار أو لا يختار العنصر داخل العينة. وتتبع الطريقة الحكمية عندما يكون المجتمع غير متجانس لدرجة كبيرة أو إذا كانت مهارات أو صفات معينة ضرورية لصدق تمثيل العينة للمجتمع. ويعيب هذه الطريقة هو أننا لا نجد سبيلا لتقدير دقة النتائج التى نحصل عليها. هذا، ومن أهم تطبيقات المعاينة الحكمية طريقة الأنصبة *quota sampling*.

### طريقة الأنصبة Quota sampling

تستخدم هذه الطريقة بكثرة فى التسويق واستطلاع الرأى. وتختلف تلك الطريقة عن طريقة الطبقات أن العينات لا تختار عشوائيا من الطبقات.

الآتي بعد هو تقسيم طلاب كلية من الكليات إلى أقسام حسب الجنس والسن و صفوف الدراسة:

الصف	الجنس	السن	
		تحت العشرين	عشرون فما فوقها
1	ذكر	75	90
	أنثى	60	63
2	ذكر	124	32
	أنثى	86	29
3	ذكر	73	44
	أنثى	59	30
4	ذكر	77	59
	أنثى	90	59

- (أ) يراد إنشاء عينة أنصبة من 70 طالبا تعكس كل صفات هذا المجتمع. احسب العدد في كل نصاب.
- (ب) لنفرض أننا قررنا أن السن والجنس ليسا مهمين في أخذ العينة، فكيف تتأثر الأنصبة؟ من 70 طالبا تعكس كل صفات هذا المجتمع. احسب العدد في كل نصاب.

- (أ) بأخذ كل نصاب مساويا نسبة ثابتة من كل تقسيم نجد أن:
- $$k = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}} = \frac{70}{1050} = 1/15$$
- نقسم كل عدد على 15. وتلافيا للكسور نقرب النتائج إلى أقرب عدد صحيح فنحصل على الجدول الآتي:

الصف	الجنس	السن	
		تحت العشرين	عشرون فما فوقها
1	ذكر	5	6
	أنثى	4	4
2	ذكر	8	2
	أنثى	6	2
3	ذكر	5	3
	أنثى	4	2
4	ذكر	5	4
	أنثى	6	4

بهذا الجدول تكون المعلومات الأساسية متوفرة للقائم بعمل الاستبيان وما عليه إلا أن يجرى الاستبيان مع من يجده من الأفراد في كل نصاب.



(ب) إذا كان السن والجنس ليسا مهمين في أخذ العينة فإننا نحصل على الجدول الآتي:

19	الصف الأول
18	الصف الثاني
14	الصف الثالث
19	الصف الرابع

ونظريا فإن العينة المأخوذة بطريقة الأنصبة لا تعتبر عينة عشوائية ولكن كثير من باحثي التسويق يعتبرونها وسيلة سهلة ورخيصة وسريعة لأخذ عينة!

#### ٦-١ الاستبيانات Questionnaires

يعد الاستبيان وسيلة هامة جدا في المعاينة. ويجرى الاستبيان بإحدى الطريقتين الآتيتين:

☐ إرسال الاستبيان بالبريد العادي أو البريد الإلكتروني.

☐ عن طريق مقابلات شخصية.

والجدول الآتي يبين مزايا كل من الطريقتين وعيوبهما:

إجراء الاستبيان عن طريق مقابلات شخصية	إرسال الاستبيان بالبريد الإلكتروني
▼ نقطة الضعف الأساسية في إجراء مقابلات شخصية هي تكلفتها ليس فقط في أجر من يقومون بإجراء المقابلات ولكن في تكلفة تدريبهم.	▲ تكلفة إرسال الاستبيان بالبريد الإلكتروني أقل من إجراء مقابلات شخصية خاصة إذا كانت الموارد محدودة أو إذا كان المجتمع مترامي الأطراف. ويمكن من باب الاحتياط تكبير حجم العينة التي يجري عليها الاستبيان.
▼ هذه الطريقة قد تستغرق بعض الوقت خاصة إذا تطلب الأمر سفر القائمين بالاستبيان.	▲ هذه الطريقة أسرع نسبيا حيث من المتوقع أن تصل الردود خلال ثلاثة أيام من إرسال الاستبيان.
▼ يخشى تأثر المستبين برأى أو تلميحات القائم بالاستبيان، لذا يُجَبَّ على القائم بالاستبيان التزام الحيادة وألا تظهر على تلميحات وجهه أي تلميحات.	▲ ضمان عدم تأثر المستبين برأى القائم بإجراء الاستبيان
▲ طريقة المقابلات الشخصية أخرى أن تجهد استجابة عالية، فمن طبيعة البشر الميل لعدم رد المسائل خاصة إذا أحسن تدريبهم. ذلك فضلا عن استعداد القائمين بالاستبيان لمساعدة المحتبين إذا التمس عليه أمر من الأمور.	▼ يخشى أن يهمل الرد تماما مما يعطي انطباعا خاطئا باتجاهات معينة.

هذا، وربما يكون من المفيد إجراء الاستبيان عن طريق التليفون الأرضي أو المحمول. غير أن هذه الوسيلة تتطلب تدريباً عالياً للقائمين على الاستبيان.

### ١-٦-١ تصميم الاستبيان Design of Questionnaire

- قبل أن نخوض في تصميم الاستبيانات بالبريد يجدر بنا أن نذكر المبادئ الآتية:
١. لا بد أن يقدم له بخطاب قصير يوضح الغرض من الاستبيان ويؤكد سرية البيانات.
  ٢. لا بد أن يكون الرد بسهولة ويسر حتى لا يضيع وقت الشخص المستبين في البحث عن كيفية إرساله.
  ٣. يستحسن أن يكون هناك مقابل رمزي لتجاوب المستبين.
  ٤. أما تصميم الاستبيان نفسه فلا بد أن يحقق الشروط الآتية:
١. لا بد أن تكون الأسئلة واضحة ومختصرة ويسهل إجابتها وأن نتجنب أى كلمات تسبب الضيق أو الإحراج.
  ٢. يجب ألا تصاغ الأسئلة بطريقة يفهم منها استدراج المستبين إلى اتجاه معين.
  ٣. يستحسن أن نتجنب الأسئلة التي تتطلب قدح الذاكرة أكثر من اللازم.
  ٤. يستحسن أن تختار الأسئلة ذات الاختيار من متعدد مثل "كم موظف عندك في

جدول المرتبات؟	أقل من ١٠٠	من ١٠٠ إلى ٥٠٠	أكثر من ٥٠٠
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### تمرين ١

١. تستخدم طرق المعاينة كثيراً في جميع البيانات في الصناعة وإدارة الأعمال. اشرح كلا من الطرق الآتية معطياً أمثلة لكل منها:
  - (أ) المعاينة العشوائية البسيطة.
  - (ب) المعاينة متعددة المراحل.
  - (ج) المعاينة الطبقية.
  - (د) المعاينة بطريقة الأنصبة.
٢. ماذا يقصد بـ "إطار المعاينة". اقترح إطاراً للمعاينة في كل حالة من الحالات الآتية:

- (أ) دراسة اتجاهات العاملين في مصنع كبير نحو مقترح جديد لنظام الورديات.
- (ب) مسح لآراء طلاب كلية من الكليات في ملائمة المناهج وكفاءة المعلمين.
- (ج) استفسار عن استخدام التلاميذ في مدينة كبيرة للحاسبات الشخصية.



٣. اشرح باختصار مع إبداء الأسباب طريقة المعاينة الملائمة لكل حالة من حالات المسألة رقم ٢.
٤. اشرح باختصار موضحا الأسباب طريقة المعاينة لكل مثال من الأمثلة الواردة بالسؤال رقم ٣.
٥. ماهي المراحل الثلاثة لإجراء معاينة في مجتمع ما. اشرح كل مرحلة بإيجاز.
٦. الجدول الآتي يمثل تصنيفات الطلاب في كلية من الكليات من حيث الصف والتخصص والنوع (طالب - طالبة):

الصف	النوع	التخصص		
		ادارة	نظم معلومات	علوم حاسب
1	طالب	90	200	30
	طالبة	70	160	12
2	طالب	120	160	24
	طالبة	80	130	8
3	طالب	140	120	14
	طالبة	80	110	10
4	طالب	100	160	16
	طالبة	60	100	6

- يراد أخذ عينة مكونة من 100 طالب وطالبة على أن تكون ممثلة لكل التصنيفات. أكتب جدول يبين الأعداد المختارة من كل صنف بطريقة الأنصبة.
٧. يراد اختيار 400 موظف من موظفي شركة كبيرة لإجراء استفتاء حول تغيير نظام المرتبات ليكون مرتبطا بالإنتاجية. ولقد تقرر أن يكون الاختيار متوقفا على عدة عوامل هي النوع (ذكر - أنثى) ودرجة التعلم (تعليم متوسط - تعليم عالي) ودرجة المهارة (ماهر - نصف ماهر - عدم المهارة). فإذا كان تصنيف الموظفين ممثلا بالجدول الآتي:

تعليم عالي		تعليم متوسط		
أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	
150	180	900	1500	ماهر
300	360	390	900	نصف ماهر
500	720	150	150	عديم المهارة

فبين كيف تؤخذ عينة لتكون ممثلة للمجتمع.

---



## الدرس الثاني توزيعات المعاينة

### SAMPLING DISTRIBUTIONS

#### ١-٢ معالم المجتمع وإحصاءات العينة

##### Population Parameters and Sample Statistics

المعلمة *parameter* هي مقياس وصفي للمجتمع ؛ فالمتوسط  $\mu$  والتباين  $\sigma$  لتوزيع طبيعي هما مثالان من أمثلة معالم المجتمع. وفي المجتمعات ذات الأحجام الضخمة فإن المتوسط والتباين الحقيقيين للمجتمع قد لا يكونان معلومان ولا بد من تقديرهما من خلال عينات ممثلة للمجتمع.

أما الإحصاءة *statistic* فهي مقياس عددي للعينة وتحسب عن طريق مشاهدات لها ، فالمتوسط  $\bar{X}$  والتباين  $s$  هما مثالان من أمثلة إحصاءات العينة. ونحن نستخدم المعلومات المستخرجة من إحصاءات العينة لنستدل على معالم المجتمع التي تمثله.

#### ٢-٢ المعاينة كتجربة عشوائية Sampling as a Random Experiment

في تجربة إلقاء زهر طاولة فإن فضاء النواتج هو:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

نفرض الآن أننا أخذنا عينات من ثلاثة نواتج من فضاء العينة. فيكون لدينا  ${}^6C_3 = 20$  عينة هي:

$$\begin{aligned} &\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \\ &\{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \\ &\{2,4,6\}, \{2,5,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}. \end{aligned}$$

اختيار عينة من هذه العشرين هو في حد ذاته تجربة عشوائية.

#### ٣-٢ التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات Sampling Distribution of the Mean

قلنا أن اختيار عينة من مجتمع هو في حد ذاته تجربة عشوائية. والآن نبحث حساب متوسط نواتج هذه التجربة العشوائية.

في تجربة إلقاء زهر طاولة فإن متوسط النواتج الممكنة هو:

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

إذا أخذنا المتوسطات للعينات ذات الثلاث نواتج فإننا نجد أن المتوسط لكل عينة يختلف باختلاف العينة وهو مبين بالجدول الآتي:

ولحساب المتوسط لهذا التوزيع نُكوّن الجدول الآتي:

العينات	$\bar{X}$	$f$	$\bar{X}f$
{1,2,3}	2	1	6/3
{1,2,4}	7/3	1	7/3
{1,2,5}, {1,3,4}	8/3	2	16/3
{1,2,6}, {1,3,5}, {2,3,4}	3	3	27/3
{1,3,6}, {1,4,5}, {2,3,5}	10/3	3	30/3
{1,4,6}, {2,3,6}, {2,4,5}	11/3	3	33/3
{1,5,6}, {2,4,6}, {3,4,5}	4	3	36/3
{2,5,6}, {3,4,6}	13/3	2	26/3
{3,5,6}	14/3	1	14/3
{4,5,6}	5	1	15/3
		20	70

إذن متوسط هذا التوزيع يساوي  $\frac{70}{20} = \frac{7}{2}$  أي يساوي متوسط النواتج.

## ٤-٢ تبين التوزيع الإحصائي لمتوسطات العينات Variance of Sampling Distribution of the Means

في تجربة إلقاء زهر طاولة فإن تبين النواتج الممكنة هو:

$$\sigma^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}$$

$\bar{X}$	$f$	$\bar{X}f$	$\bar{X}^2 f$
2	1	6/3	36/9
7/3	1	7/3	49/9
8/3	2	16/3	64/9
3	3	27/3	243/9
10/3	3	30/3	300/9
11/3	3	33/3	363/9
4	3	36/3	432/9
13/3	2	26/3	338/9
14/3	1	14/3	196/9
5	1	15/3	225/9
	20	70	770/3

والآن لحساب تبين التوزيع الإحصائي لمتوسطات العينات ذات الثلاث نواتج فإننا نكون الجدول الآتي: ←

من الجدول نجد أن تبين توزيع المتوسطات هو:

$$\frac{77}{6} - \frac{49}{4} = \frac{154 - 147}{12} = \frac{7}{12}$$

وهذا يختلف عن تبين النواتج.

والنظرية الآتية تبين كيف نحسب تبين توزيع المعاينة من تبين النواتج لمجتمع صغير نسبياً:



نفرض أن لدينا مجتمعا حجمه  $N$  ومتوسطه  $\mu$  وتباينه  $\sigma^2$ ، وأخذنا من هذا المجتمع جميع العينات الممكنة ذات حجم  $n$  بدون إحلال، فإن توقع متوسط توزيع المعاينة الناتج هو:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

وتباينه هو:

$$V(\bar{x}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

ففي المثال السابق  $N=6$ ،  $\mu=7/2$ ،  $\sigma^2=35/12$ ،  $n=3$ . إذن:

$$E(\bar{x}) = \mu = 7/2,$$

$$V(\bar{x}) = \frac{6-3}{6-1} \cdot \frac{35/12}{3} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$$

في المجتمعات ذات الأحجام الضخمة تؤول قيمة المعامل  $\frac{N-n}{N-1}$  إلى 1 ويصبح:

$$V(\bar{x}) = \sigma^2 / n \quad , \quad \sqrt{V(\bar{x})} = \sigma / \sqrt{n}$$

## ٥-٢ نظرية النهاية المركزية Central Limit Theorem

إذا أخذنا عينات حجمها  $n$  من مجتمع ذي توزيع طبيعي فإن التوزيع الإحصائي للعينة هو أيضا توزيع طبيعي. ولكن يمكن أن نثبت أنه إذا كان حجم العينة كبيرا فإن توزيع المعاينة للمتوسط يقترب من التوزيع الطبيعي حتى إذا أخذت العينات من مجتمع توزيعه ليس طبيعيا ويكون:

$$E(\bar{x}) = \mu \quad , \quad V(\bar{x}) = \sigma^2 / n$$

وفي المعتاد فإن حجم العينة إذا بلغ 30 أو أكثر فتتطبق عليها هذه النتيجة.

مثال (١)

إذا كانت أعمار نوع معين من بطاريات السيارات تتبع توزيعا إحصائيا ذا متوسط 30 شهرا وانحراف معياري 9 شهور، وأخذت عينات ذات حجم 36 بطارية فاحسب المتوسط والتباين لتوزيع المعاينة وأوجد احتمال أن يكون المتوسط للعينة أكبر من 32 شهرا.

الحل

الحجم 36 للعينة يكفي لأن نعتبر التوزيع طبيعيا بمتوسط  $\mu = 30$  وانحراف معياري  $\sigma = 9$ .

$$Z(\bar{x} > 32) > \frac{32-30}{9/\sqrt{36}} = \frac{4}{3} = 1.33$$

نبحث في جدول التوزيع الطبيعي عن المساحة التي تتأخر 1.33 فنجد أن:

$$P(z \geq 1.33) = 0.5000 - 0.4082 = 0.0918 \quad \text{مثال (٢)}$$

نص تقرير على أن الأطفال في المرحلة العمرية بين سنتين وخمس سنوات يشاهدون التلفزيون 25 ساعة أسبوعياً في المتوسط. على فرض أن التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 3 ساعات وأخذنا عينة من 20 طفلاً في تلك المرحلة العمرية، أوجد احتمال أن يتجاوز متوسط ساعات المشاهدة 26.3 ساعة.

الحل

$$n = 20, \mu = 25, \sigma = 3$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{26.3 - 25}{3 / \sqrt{20}} = \frac{1.3}{0.671} = 1.94$$

$$P(\bar{x} > 26.3) = 0.5 - 0.4738 = 0.0262.$$

مثال (٣)

من المعلوم أن متوسط الدخل السنوي للمبرمجين يساوي L.E. 4000 بانحراف معياري L.E. 600. أخذت عينة عشوائية من 36 مبرمج من عدد من الشركات.

(أ) أوجد احتمال أن يقل متوسط الدخل في العينة عن L.E. 3750.

(ب) أوجد احتمال أن يكون متوسط في العينة محصوراً بين L.E. 3750، L.E. 4250.

(ج) أوجد احتمال أن يتجاوز متوسط في العينة L.E. 4150.

الحل

$$n = 36, \mu = 4000, \sigma = 600$$

(أ)

$$P(\bar{x} \leq 3750) = P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{3750 - 4000}{600 / \sqrt{36}}\right)$$

$$= P\left(z \leq \frac{-250}{100}\right) = P(z \leq -2.5) = 0.0062$$

(ب)

$$P(3750 \leq \bar{x} \leq 4250) = P\left(\frac{3750 - 4000}{600 / \sqrt{36}} \leq z \leq \frac{4250 - 4000}{600 / \sqrt{36}}\right)$$

$$= P(-2.5 \leq z \leq 2.5) = 2P(0 \leq z \leq 2.5)$$

$$= 2 \times 0.4938 = 0.9876$$

(ج)

$$P(\bar{x} \geq 4150) = P\left(z \geq \frac{4150 - 4000}{600 / \sqrt{36}}\right)$$

$$= P(z \geq 1.5) = 1 - 0.9932 = 0.0068$$



## ٦-٢ توزيعات المعاينة للنسب Sampling Distribution of Proportions

أحيانا يكون من الضروري أن نبحث في النسب؛ فقد يريد رئيس الشئون المالية في شركة ما أن يحسب نسبة الفواتير التي تتعدى قيمتها L.E. 250 ، أو أن يعرف كم مطالبة نفقات غير مستوفاة للشروط المالية والإدارية.

لنفرض أن لدينا مجتمعا يحتوى على نسبة  $p$  من العناصر التي بها صفة تستحق الاهتمام (التألف مثلا). إذا أخذنا عدة عينات ذات حجم  $n$  وأردنا أن نحسب نسبة العناصر التألفة في كل عينة فإننا نستطيع أن نستفيد من نظرية النهاية المركزية بالصيغة الآتية:

إذا كان حجم العينة  $n$  كبيرا ، وكانت  $p$  (نسبة التألف في المجتمع) ليست قريبة من

0 أو 1 فإن  $\hat{p}$  (نسبة التألف في العينة) تقرب من التوزيع الطبيعي بمتوسط  $p$

وتباين  $p(1-p)/n$ .

مثال (١)

وجد أن نسبة الشفاء من مرض ما إذا أعطوا علاجاً معيناً هي 80%. إذا أعطينا هذا العلاج لعينة عشوائية من 64 يعانون من المرض:

(أ) ما هو المتوسط والانحراف المعياري للمرضى الذين يُشفون؟

(ب) ما هو احتمال أن يُشفى أقل من 50 مريضاً؟

الحل

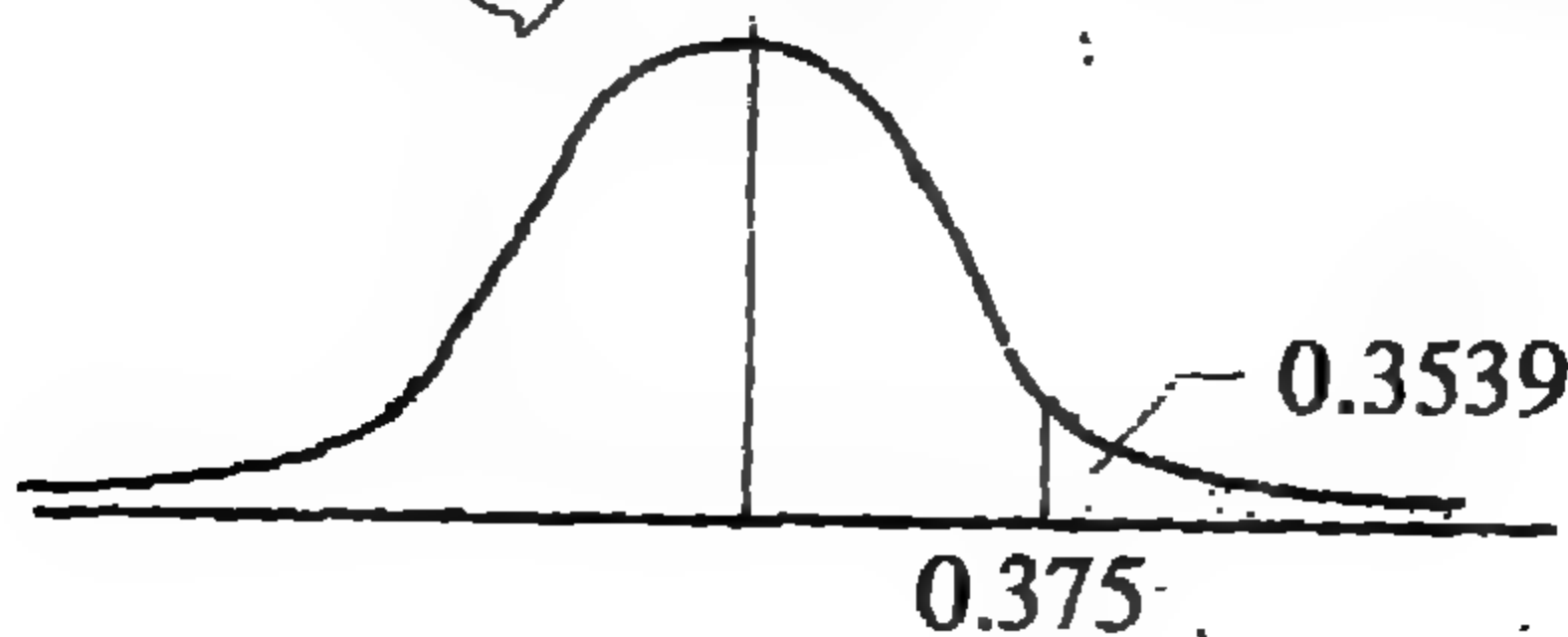
(أ)  $p = 0.8$  ،  $n = 64$  . إذن توزيع العينة له متوسط 0.8 وانحراف معياري:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{(0.8 \times 0.2)/64} = \sqrt{0.0025} = 0.05$$

$$P(\hat{p} < 0.78125) = P\left(z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} < \frac{\frac{50}{64} - 0.8}{0.05}\right) \quad (ب)$$

$$= P\left(z < \frac{0.78125 - 0.8}{0.05}\right) = P(z < -0.375)$$

إذن الاحتمال المطلوب هو المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري لأقل من  $-0.375$  (أكبر من 0.375) أي 0.3539.



وجد أن نسبة المدخنين بين الطلاب الجامعيين هي 20%. أختير 400 طالب عشوائياً من جامعة ما. أوجد احتمال:

- (أ) أن تكون نسبة المدخنين في العينة أقل من 17%.  
 (ب) أن تكون نسبة المدخنين في العينة بين 17% ، 23 % .  
 (ج) أن تتجاوز نسبة المدخنين في العينة بين 24% .

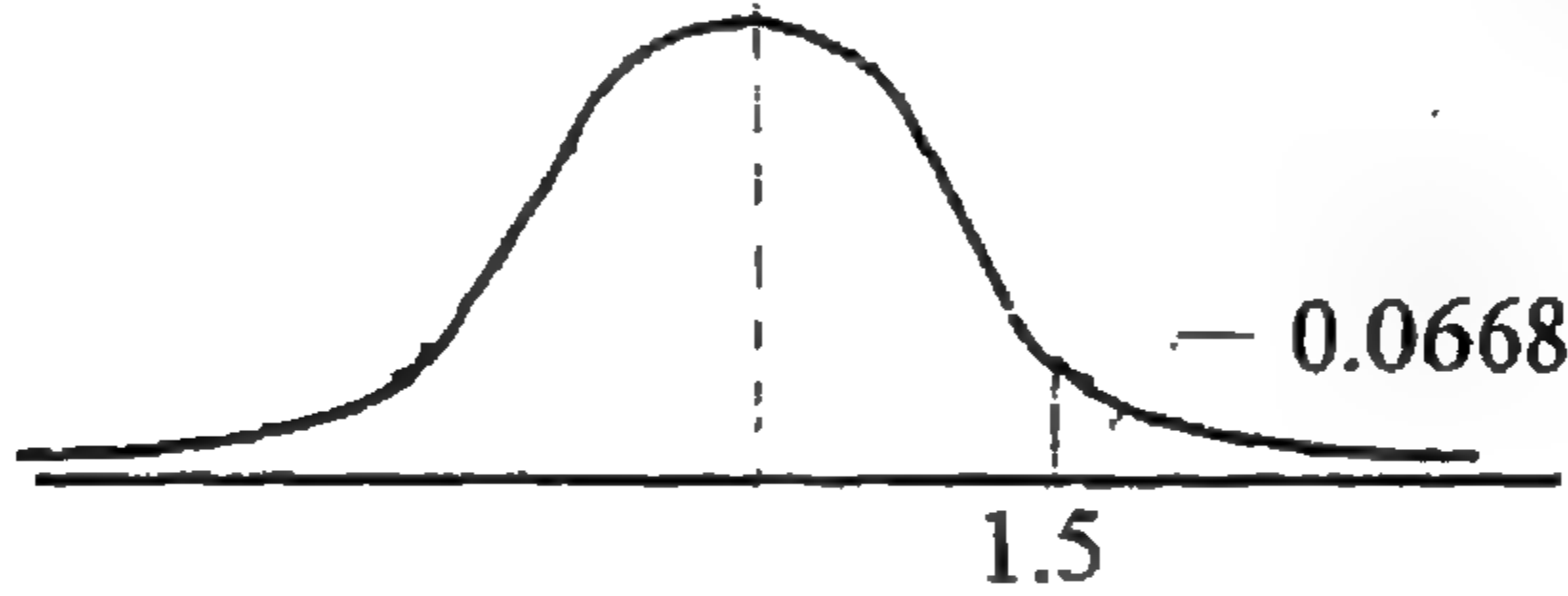
الحل

إذن:  $n = 400$  ،  $p = 0.2$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{(0.2 \times 0.8)/400} = 0.02$$

$$P(\hat{p} < 0.17) = P\left(z = \frac{\hat{p} - p}{\hat{\sigma}} < \frac{0.17 - 0.20}{0.02}\right) \quad (أ)$$

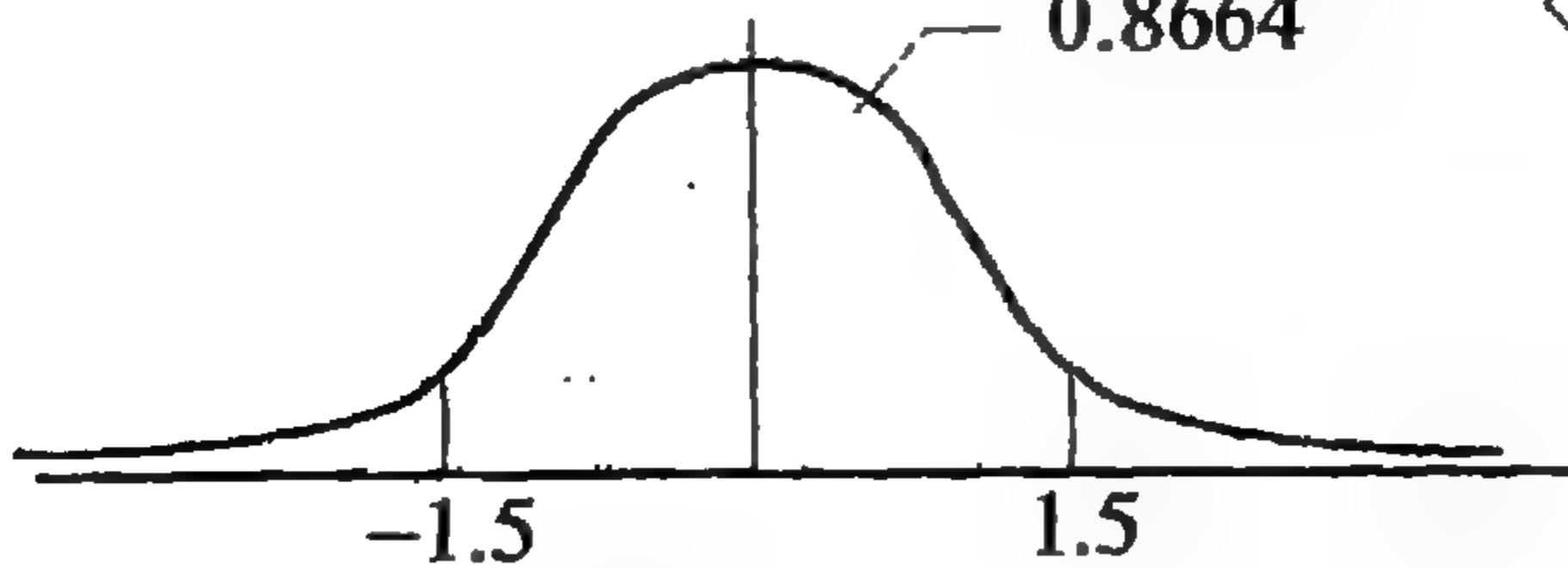
$$= P(z < -1.5) = P(z > 1.5) = 0.0668$$



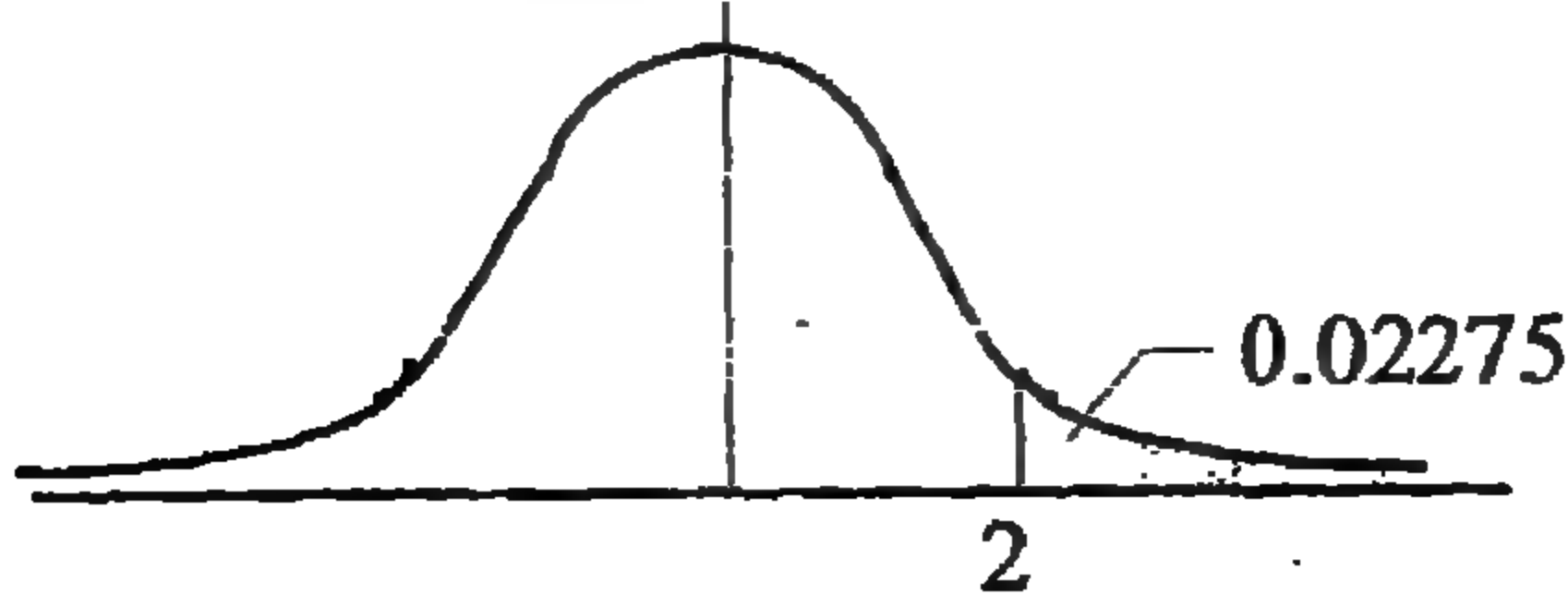
$$P(0.17 \leq \hat{p} \leq 0.23) = P\left(\frac{0.17 - 0.20}{0.02} \leq z \leq \frac{0.23 - 0.20}{0.02}\right) \quad (ب)$$

$$= P(-1.5 \leq z \leq 1.5) = 2P(0 \leq z \leq 1.5)$$

$$= 2 \times 0.4332 = 0.8664$$



$$P(\hat{p} > 0.24) = P\left(z > \frac{0.24 - 0.20}{0.02}\right) = P(z > 2) = 0.02275 \quad (ج)$$



## تمرين (٢)

١. فيما يلي نعطى المتوسط  $\mu$  والتباين  $\sigma^2$  للمتغير العشوائي  $X$  في مجتمع حجمه  $N$ . احسب القيمة المتوقعة  $E(\bar{X})$  والتباين  $V(\bar{X})$  لمتوسطات عينات عشوائية حجمها  $n$  من المجتمع.

$$(أ) \quad n = 4, 8, 50, 100 ; \sigma^2 = 8, \mu = 66.3, N = 12,200$$

$$(ب) \quad n = 2, 10, 50, 100 ; \sigma^2 = 0.7921, \mu = 154.2, N = 5,765$$

$$(ج) \quad n = 2, 10, 50, 100 ; \sigma^2 = 268.96, \mu = 14.29, N = 1,905$$

$$(د) \quad n = 2, 10, 50, 100 ; \sigma^2 = 0.0225, \mu = 2.97, N = 1,905$$

٢. فيما يلي نعطى المتوسط  $\mu$  والتباين  $\sigma^2$  للمتغير العشوائي  $X$  في مجتمع حجمه  $N$ . احسب احتمال أن يحقق المتوسط  $\bar{x}$  لعينات عشوائية حجمها  $n$  المتباينات المذكورة:

$$(أ) \quad N = 12,200, \mu = 66.3, \sigma^2 = 8, P(66.41 \leq \bar{x} \leq 68.19); n = 10, 40, 90$$

$$(ب) \quad N = 12,200, \mu = 66.3, \sigma^2 = 8, P(66.85 \leq \bar{x} \leq 67.75); n = 40$$

$$(ج) \quad N = 12,200, \mu = 66.3, \sigma^2 = 8, P(67.00 \leq \bar{x} \leq 67.60); n = 90$$

$$(د) \quad N = 5,765, \mu = 154.2, \sigma^2 = 268.96, P(152.08 \leq \bar{x} \leq 157.37); n = 15, 60, 135$$

$$(هـ) \quad N = 5,765, \mu = 154.2, \sigma^2 = 268.96, P(153.14 \leq \bar{x} \leq 155.79); n = 60$$

$$(و) \quad N = 5,765, \mu = 154.2, \sigma^2 = 268.96, P(153.49 \leq \bar{x} \leq 155.26); n = 135$$

$$(ز) \quad N = 1,905, \mu = 2.97, \sigma^2 = 0.0225, P(\bar{x} \leq 14.49); n = 20, 40, 80$$

$$(ح) \quad N = 1,905, \mu = 2.97, \sigma^2 = 0.0225, P(\bar{x} \leq 2.99); n = 15, 30, 60$$



٣. أوزان عبوات من تركيبة غذائية تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 502 جرام بانحراف معياري 3.75 جرام. اختيرت عينات عشوائية من 16 عبوة. احسب المتوسط والتباين لمتوسطات العينات.
٤. أفاد عالم نفساني في تقرير كتبه أن الأطفال في المرحلة العمرية من سنتين إلى خمس سنوات يشاهدون التلفيزين بمعدل 25 ساعة أسبوعياً في المتوسط. اختيرت عينة عشوائية من 20 طفلاً في تلك المرحلة العمرية. أوجد احتمال أن يكون متوسط عدد ساعات المشاهدة في تلك العينة أكبر من 26.3 ساعة أسبوعياً بفرض أن المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد ساعات المشاهدة أسبوعياً يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 25 ساعة بانحراف معياري 3 ساعات.
٥. ووجد متوسط مدة بقاء السيارة عند المالك الأول لها في مدينة ما هو 96 شهراً. بفرض أن الانحراف المعياري هو 16 شهراً واختيرت عينة عشوائية من 36 سيارة أوجد احتمال أن يكون متوسط بقاء السيارة عند المالك الأول لها بين 90، 100 شهراً.
-

## الدرس الثالث التقدير ESTIMATION

١-٣ مقدمة

واحدة من أهم طرق الإحصاء الاستدلالي هي أن نُقدّر معلمات مجتمع ما عن طريق عينات نأخذها منه. وقد ابتكر الإحصائيون طريقتان للتقدير: الطريقة الأولى تسمى التقدير عند نقطة *point estimation* ، والطريقة الثانية هي التقدير على فترة

*interval estimation*

التقدير

التقدير على فترة

التقدير عند نقطة

نعلم أنه إذا كان لدينا متغيراً عشوائياً متصلاً، فإن كثيراً من معلمات المجتمع الذي يعبر عنه هذا المتغير العشوائي مثل المتوسط والتباين هي أيضاً متصلة لذا لا يصلح لها التقدير عند نقطة، فمثلاً احتمال أن تكون قيمة تباين أعمار المصابيح 106 ساعة بالضبط يساوي صفراً! وبدلاً من ذلك يستطيع صاحب المصنع أن يقدر أن قيمة التباين تقع في الفترة  $[101.34, 110.66]$ .

وهو يتضمن قيمة واحدة (نقطة) فقد يقدر صاحب مصنع للمصابيح تباين الإنتاج الجديد بـ 106 ساعة.

لذا فإن التقدير عند نقطة يناسب المجتمعات التي يُعبر عنها متغير عشوائي متقطع. أما المجتمعات التي يُعبر عنها متغير عشوائي متصل فيُناسبها التقدير على فترة.

٢-٣ الخصائص المطلوبة للتقدير عند نقطة

اتفق علماء الإحصاء أن المُقدّر لمعلمة من معالم المجتمع يجب أن تكون له الصفات والخصائص الآتية:

١. يجب أن يكون المُقدّر غير متحيز

يكون المقدّر  $\hat{\theta}$  لمعلمة  $\theta$  غير متحيز إذا كان توقعه يساوي  $\theta$ . أي إذا كان:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

٢. يجب أن يكون المُقدّر متوافقاً

يكون المقدّر  $\hat{\theta}$  لمعلمة  $\theta$  متوافقاً إذا كان لأي عدد موجب  $\varepsilon$  فإن:

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon)$$

يؤول إلى 1 كلما ازداد حجم العينة. أي أن:

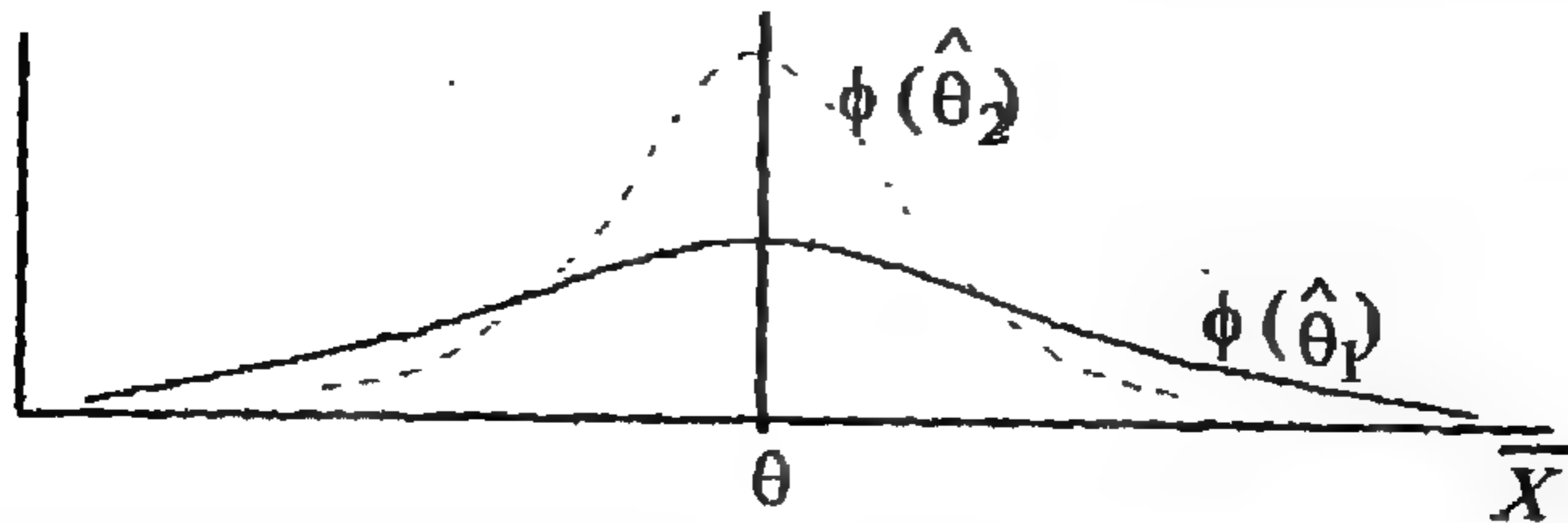
$$P(\theta - \varepsilon < \hat{\theta} < \theta + \varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{كلما ازداد حجم العينة}$$

٣. يجب أن يكون المُقدّر كفواً

بوجه عام نستطيع أن نقول أن المقدّر ذو أقل تباين هو الأكفأ. ونبرر ذلك كالآتي:

حيث أن المقدّر  $\hat{\theta}$  هو متغير عشوائى فلا بد أن يكون له تغييرا. الشكل الآتى يبين

توزيعى المعاينة لمقدرين غير متحيزين  $\hat{\theta}_1$  ،  $\hat{\theta}_2$  :



واضح أن التوزيع  $\phi(\hat{\theta}_2)$  يحصر المعلبة  $\theta$  فى فترة أقل مما يفعل التوزيع  $\phi(\hat{\theta}_1)$ .

### ٣-٣ تقدير المتوسط Estimating the Mean

سنثبت الآن أن متوسط العينة  $\bar{X}$  هو مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع  $\mu$ .

لتكن العينة ذات حجم  $n$ . فإن توقع المتوسط  $\bar{X}$  هو:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}E(X_1) + \frac{1}{n}E(X_2) + \dots + \frac{1}{n}E(X_n) \quad (\text{من خصائص التوقع})$$

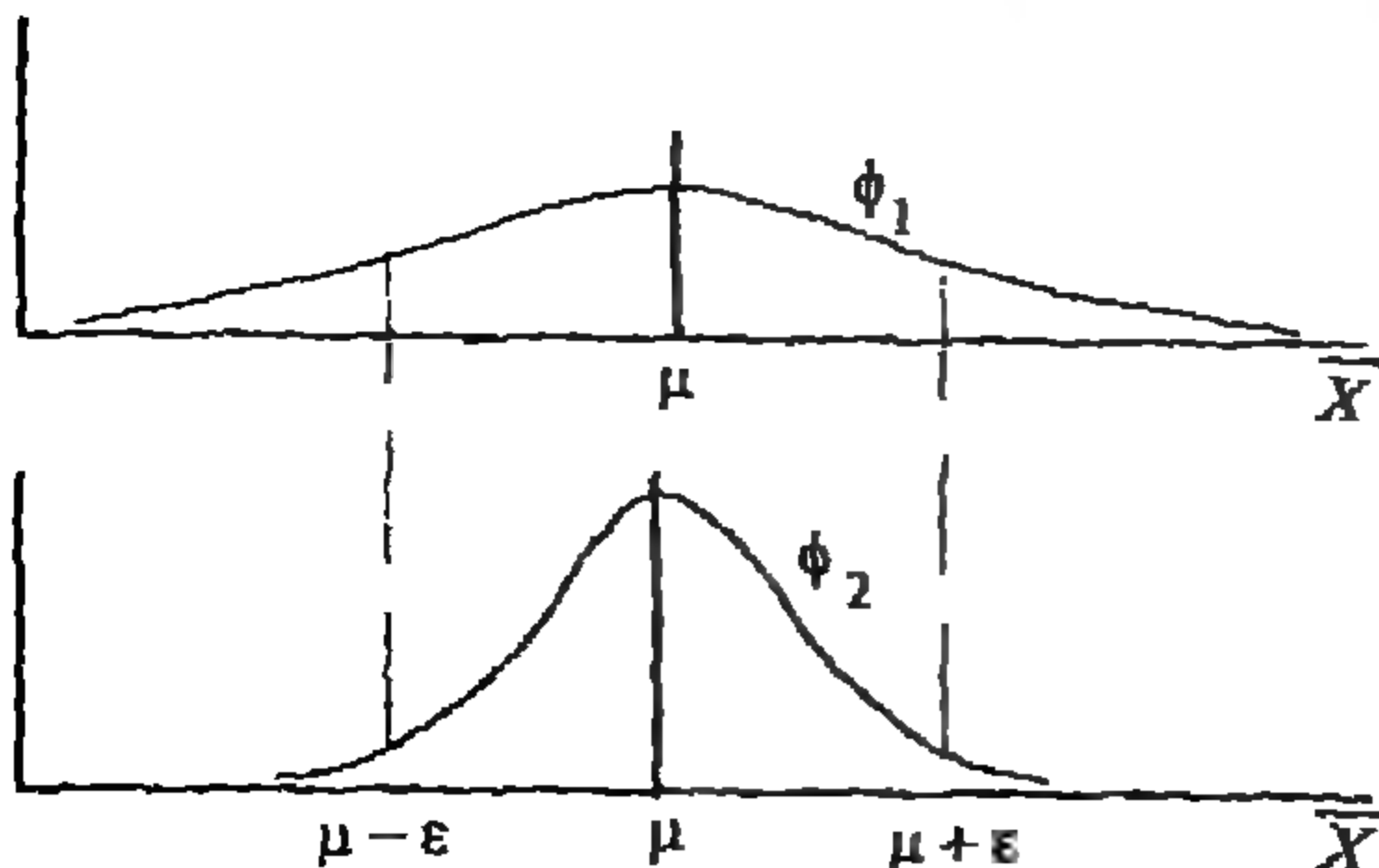
$$= \frac{1}{n}\mu + \frac{1}{n}\mu + \dots + \frac{1}{n}\mu = \mu$$

(حيث أن  $X_1, X_2, \dots, X_n$  هى عناصر من المجتمع وتوقع أى منها يساوى متوسط المجتمع  $\mu$ ).

ومن نظرية النهاية المركزية فإن  $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2 / n$  وعندما يزداد حجم العينة  $n$  فإن  $\sigma_{\bar{X}}^2$

تؤول إلى الصفر. لذا فإن الفترة اللازمة لتحصر  $\mu$  تضيق كلما ازداد حجم العينة.

وبالعكس إذا اخترنا نقطتين  $\mu - \epsilon$  ،  $\mu + \epsilon$  فإن المساحة بينهما تزداد بازدياد حجم العينة  $n$ . أى أن:



$$P(\mu - \epsilon \leq \bar{X} \leq \mu + \epsilon)$$

تزداد كلما ازدادت  $n$ . وذلك

يعنى أن  $\bar{X}$  هو مقدر متوافق.



### ٤-٣ تقدير التباين Estimating the Variance

لتكن لدينا عينة  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ذات حجم  $n$  من مجتمع ما. قد يتبادر للذهن أن:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

هو مقدر غير متحيز لتباين المجتمع  $\sigma^2$ ، ولكن يمكن أن تثبت أن الصيغة:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

هى التى تعطى تقديرا غير متحيز لتباين المجتمع  $\sigma^2$ .

مثال

عينة مكونة من 20 فاتورة من عدد كبير منها. فإذا كانت قيم تلك الفواتير هى:

12.53	22.27	13.38	51.47	8.05
11.47	58.00	43.16	19.05	22.20
24.11	43.48	15.27	50.97	8.06
62.93	32.04	26.78	38.07	45.11

أوجد تقديرا نقطيا لكل من:

- (أ) متوسط مجتمع الفواتير  
(ب) نسبة الفواتير التى تزيد عن L.E. 50  
(ج) تباين مجتمع الفواتير

الحل

من الجدول نستطيع أن نستنتج أن:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 608.40 \quad , \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 24082.8840$$

(أ) تقدير متوسط مجتمع الفواتير هو:

$$\hat{\mu} = \frac{608.40}{20} = \text{L.E. } 30.42$$

(ب) حيث أن عدد الفواتير التى تزيد عن L.E. 50 فى العينة هو 4 أى بنسبة 0.2، إذن:

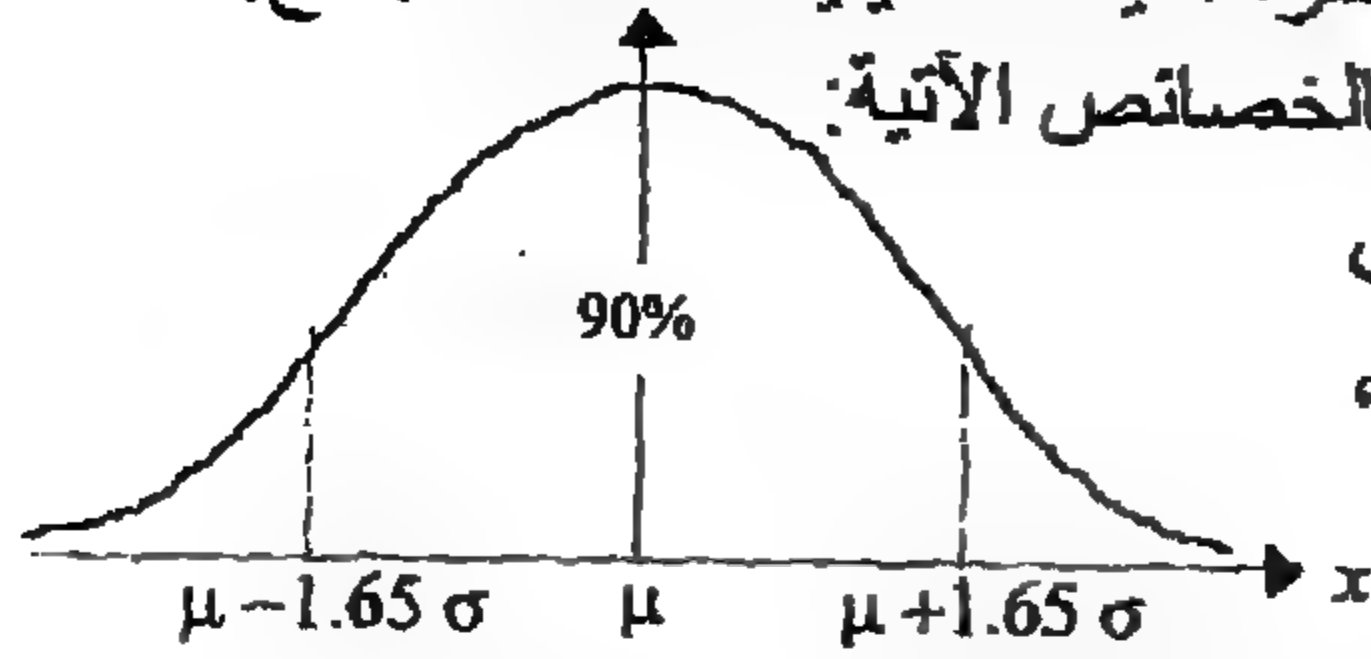
$$\hat{p} = \frac{4}{20} = 0.2$$

(ج) تقدير تباين مجتمع الفواتير هو:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{24082.884 - 20(30.42)^2}{19}} = \text{L.E. } 17.13$$

### ٥-٣ التقدير على فترة - مستوى الثقة Interval Estimation - Confidence Level

التقدير على فترة هو تحديد فترة بين عددين نحصل عليهما من حسابات تجريها على قيم مفردات عينة بحيث تحصر تلك الفترة القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع.



يمكن أن نثبت أن التوزيع الطبيعي يتمتع بالخصائص الآتية:  
١. 90% بالضبط من المساحة تحت منحنى

التوزيع الطبيعي يقع بين  $-1.65\sigma$  ،

$1.65\sigma$  .

في هذه الحالة نستطيع أن نقول أن الخطأ المعياري في حساب متوسط المجتمع

عند مستوى ثقة 90% يقع بين  $-1.65\sigma$  ،  $1.65\sigma$  .

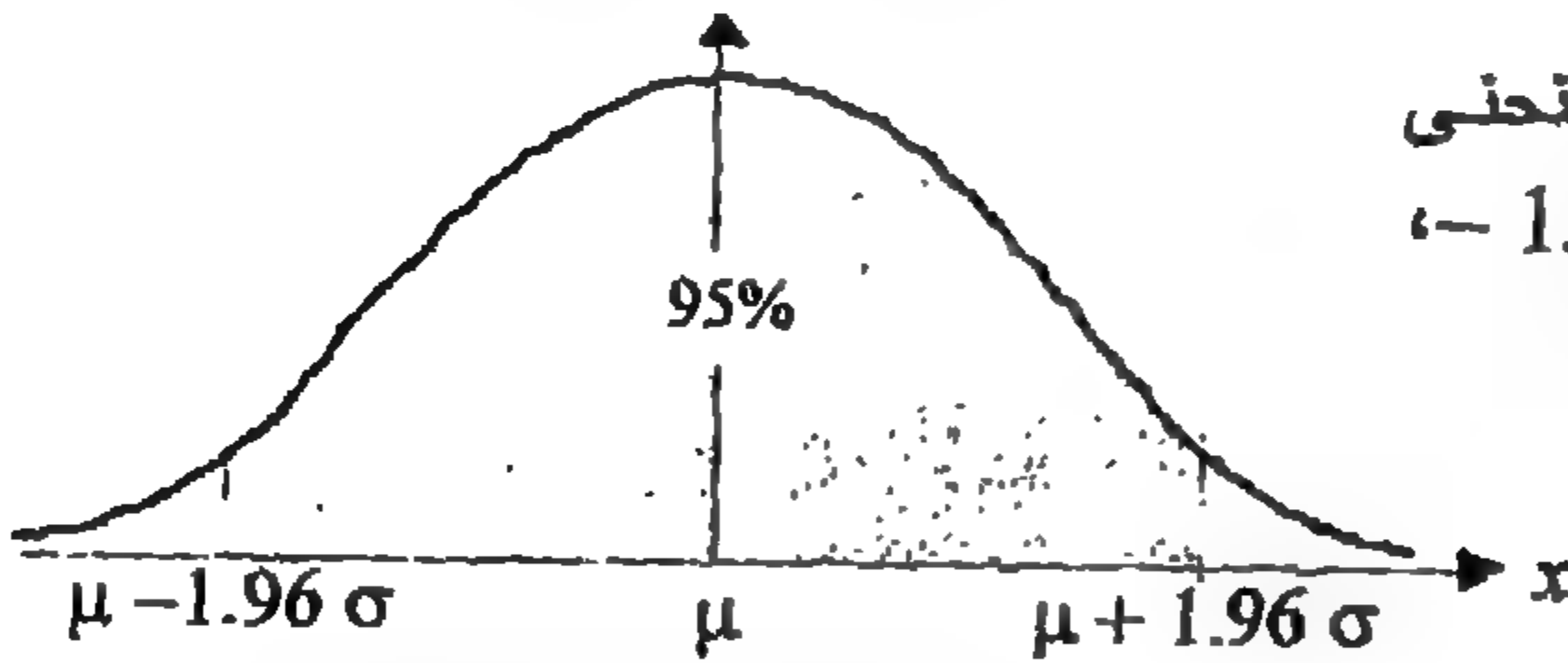
$$P\left(-1.65 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < 1.65\right) = 0.90$$

أي أن:

$$P\left(\frac{-1.65\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < \frac{1.65\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.90$$

أي أن:

أي أنه عند مستوى ثقة 90% فإن الخطأ المطلق بين متوسط العينة والمتوسط الحقيقي للمجتمع لا يتجاوز  $1.65 \sigma / \sqrt{n}$  .



٢. 95% بالضبط من المساحة تحت منحنى

التوزيع الطبيعي يقع بين  $-1.96\sigma$  ،

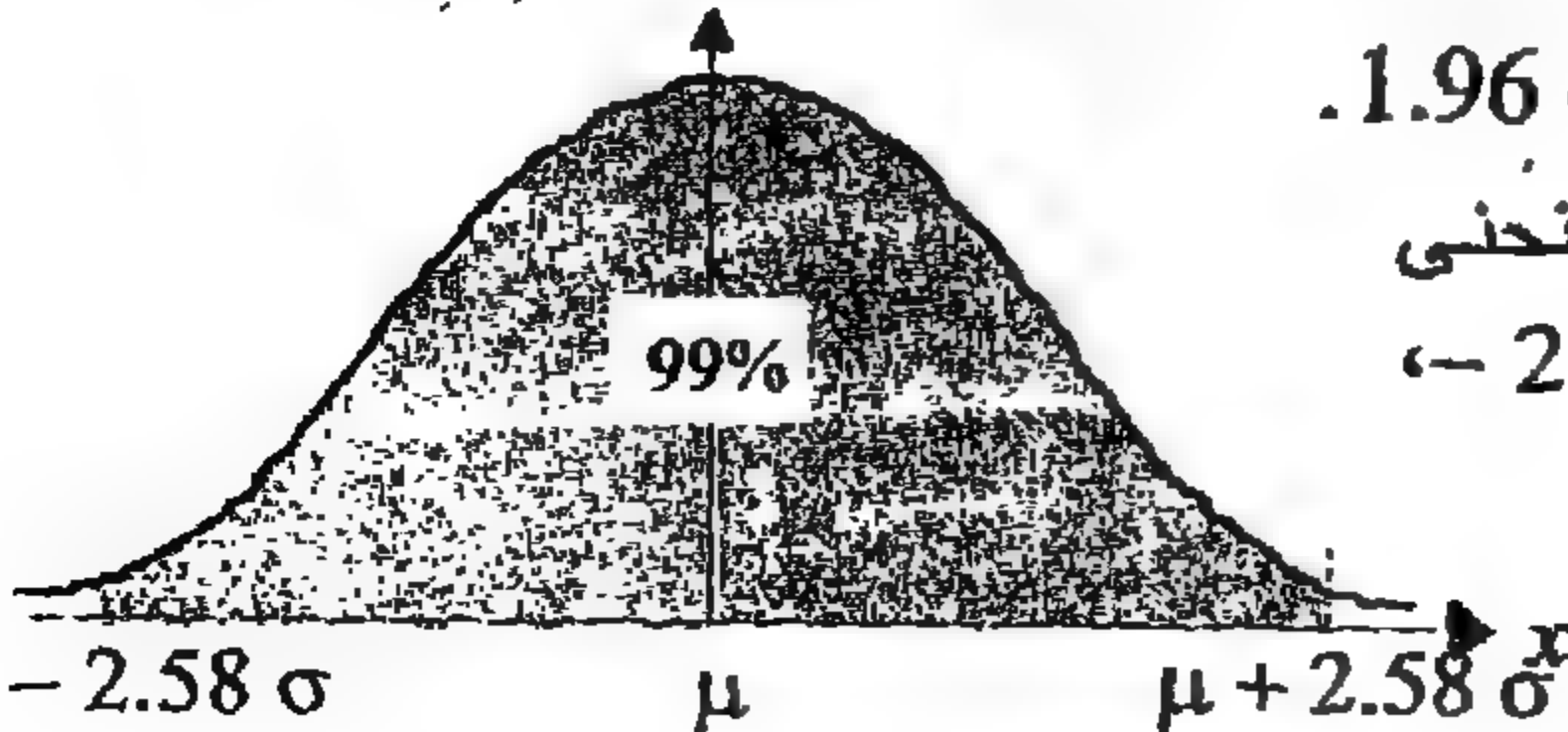
$1.96\sigma$  .

في هذه الحالة نجد أن:

$$P(-1.96\sigma / \sqrt{n} < \bar{X} - \mu < 1.96\sigma / \sqrt{n}) = 0.95$$

أي أنه عند مستوى ثقة 95% فإن الخطأ المطلق بين متوسط العينة والمتوسط

الحقيقي للمجتمع لا يتجاوز  $1.96 \sigma / \sqrt{n}$  .



٣. 99% بالضبط من المساحة تحت منحنى

التوزيع الطبيعي يقع بين  $-2.58\sigma$  ،

$2.58\sigma$  .

في هذه الحالة نجد أن:

$$P(-2.58\sigma / \sqrt{n} < \bar{X} - \mu < 2.58\sigma / \sqrt{n}) = 0.99$$

أي أنه عند مستوى ثقة 99% فإن الخطأ المطلق بين متوسط العينة والمتوسط

الحقيقي للمجتمع لا يتجاوز  $2.58 \sigma / \sqrt{n}$  .

### مثال (١)

يريد محاسب أن يتحرى عن زمن تحصيل الديون المستحقة لشركته. وقد وجد بخبرته أن أزمان تحصيل الديون تتبع توزيعاً طبيعياً تقريباً بانحراف معياري 10 أيام، وإذا كانت أزمان تحصيل الديون أكبر من اللازم فإن الشركة تكون معرضة للإفلاس. ولذلك لا بد من معرفة متوسط أزمان تحصيل الفواتير بدقة. من أجل ذلك أخذ عينة من 25 فاتورة من العام الماضي فوجد أن متوسط أزمان تحصيلها هو 44 يوماً. على مستوى ثقة 95% ما هي دقة تقدير متوسط كل الفواتير بمتوسط العينة؟

الحل

$$P\left(-\frac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$\therefore P\left(-\frac{1.96 \times 10}{\sqrt{25}} < \bar{x} - \mu < \frac{1.96 \times 10}{\sqrt{25}}\right) = 0.95$$

$$\therefore P(-3.92 < \bar{x} - \mu < 3.92) = 0.95$$

$$\therefore P(\bar{x} - 3.92 < \mu < \bar{x} + 3.92) = 0.95$$

$$\therefore P(44 - 3.92 < \mu < 44 + 3.92) = 0.95$$

$$\therefore P(40.08 < \mu < 46.92) = 0.95$$

وهذا يعنى أن المحاسب يكون واثقاً بنسبة 95% أن المتوسط الحقيقى لأزمان تحصيل الفواتير يتراوح بين 40.08 يوماً ، 46.92 يوماً.

### مثال (٢)

يريد مدير شركة إنتاج أدوات كهربائية أن يقدر كم يوماً تأخذه طلبية من الأجهزة حتى تصل للعميل. ومن أجل ذلك اختار عينة من 60 طلبية سابقة فوجد أن متوسط العينة هو 5.9 يوماً وتقدير الانحراف المعياري في العينة هو 1.7 يوماً. احسب فترة الثقة عند مستوى 95% .

الحل

فترة الثقة للمتوسط  $\mu$  عند مستوى 95% هي:

$$\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

ولكن الانحراف المعياري  $\sigma$  للمجتمع غير معلوم. غير أنه لحسن الحظ فإن كبر حجم العينة يبرر أخذ التقدير غير المتحيز  $\hat{\sigma}$  للانحراف المعياري للمجتمع من العينة.

إن فترة الثقة هي:

$$\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$$

إن فترة الثقة هي:

$$\left(5.9 - 1.96 \times \frac{1.7}{\sqrt{60}}, 5.9 + 1.96 \times \frac{1.7}{\sqrt{60}}\right)$$

أي أنه عند مستوى ثقة 95% فإن الطلبية تأخذ من 5.47 إلى 6.33 يوماً حتى تصل إلى العميل.



مثال (٣) من خلال مراجعة محاسبية أخذت 50 فاتورة من عدد كبير من الفواتير ووجد أن المتوسط هو L.E. 52.40 وأن الانحراف المعياري هو L.E. 5.60. أوجد الخطأ المعياري في حساب المتوسط واحسب فترة الثقة لتقدير المتوسط عند مستوى 90%.

الحل

حيث أن الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم فإننا نأخذ تقديره من العينة. إذن:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{5.60}{7} = 0.80$$

فترة الثقة للمتوسط  $\mu$  عند مستوى 90% هي:

$$(\bar{X} - 1.65 \times 0.80, \bar{X} + 1.65 \times 0.80)$$

أي:

$$(52.40 - 1.65 \times 0.80, 52.40 + 1.65 \times 0.80)$$

أي:

$$\text{L.E. } (51.08, 53.72)$$

مثال (٤)

من خلال تحليل شركة لعينة عشوائية من معاملات العملاء خلال شهر وجدت الآتي:

حجم التعامل بالآلاف جنيه	أقل من 1	1 -	5 -	10 -	15 -	20 -	30 -
عدد العملاء	8	19	38	40	22	13	4

قدر متوسط التعامل والانحراف المعياري لمعاملات الشركة ككل واحسب فترة الثقة لتقدير المتوسط عند مستوى 95%.

الحل

نكون الجدول الآتي:

الفئة	$x_i$	$f_i$	$f_i x_i$	$x_i^2 f_i$
أقل من 1	0.5	8	4	2.0
1 -	3.0	19	57	171.0
5 -	6.5	38	285	2136.5
10 -	12.5	40	500	6250.0
15 -	16.5	22	385	6736.5
20 -	25.0	13	325	8125.0
30 -	40.0	4	160	6400.0
المجموع		144	1716	29823.0

$$\bar{x} = \frac{1716}{144} = \text{L.E. } 11.92,$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{29823}{144} - (11.92)^2} = \sqrt{207.1 - 142.09} = 8.06$$

فترة الثقة للمتوسط  $\mu$  عند مستوى 95% هي:

$$(11.92 - 1.96 \times \frac{8.07}{12}, 11.92 + 1.96 \times \frac{8.07}{12}) = (10.60, 13.24)$$

### ٦-٣ حجم العينة Sample Size

هناك سؤال يطرح نفسه هو: ما هو أقل حجم يلزم لكي يكون التقدير دقيقاً؟ إجابة هذا السؤال ليست سهلة حيث أن الدقة في التقدير تعتمد على ثلاثة عوامل هي: (أ) أكبر خطأ للتقدير (ب) الانحراف المعياري للمجتمع (ج) مستوى الثقة على فرض أن الانحراف المعياري للمجتمع معروف أو تم تقديره في دراسة سابقة فإن العلاقة بين حجم العينة المطلوب وأكبر خطأ للتقدير هي:

$$E = z_{\alpha/2} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

حيث  $z_{\alpha/2}$  تحدد من الجدول الآتي:

مستوى الثقة	90%	95%	99%
$Z_{\alpha/2}$	1.65	1.96	2.58

$$\therefore n = \left( \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$$

مثال

تريد كلية من الكليات الجامعية أن تقدر متوسط أعمار الطلاب من أجل ذلك كلفت مدرس من مدرسي الإحصاء أن يجري هذه الدراسة. فإذا أراد المدرس أن يكون على ثقة 99% من أن تقديره يكون دقيقاً إلى عام واحد فكم يكون حجم العينة إذا علم أنه في دراسة سابقة وجد أن الانحراف المعياري لطلاب الكلية هو 3 سنوات؟

الحل

$$n = \left( \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{2.58 \times 3}{1} \right)^2 = 59.9$$

أي أن حجم العينة اللازم لدرجة الدقة المطلوبة هو 60 طالباً.

### ٧-٣ تقدير النسب على فترة Interval Estimation of Proportion

كما هو الحال مع متوسط المجتمع فإننا كثيراً ما نحتاج إلى تقدير النسبة  $p$  لمعلمة من معالم المجتمع باستخدام النسبة  $\hat{p}$  المستخرجة من العينة. وباستخدام النتيجة التي وصلنا إليها أن نسبة العينة  $\hat{p}$  تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه  $p$  وانحرافه المعياري  $\sqrt{p(1-p)/n}$  بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً وأن تكون  $p$  ليست قريبة من 0 أو 1 فإننا نتوقع أن تكون فترة الثقة عند مستوى 95 % هي:

$$\left[ \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

ولكن هذه الفترة تعتمد على النسبة  $p$  في المجتمع وهي غير معلومة. ومع ذلك إذا استبدلنا  $p$  بـ  $\hat{p}$  فإن فترة الثقة تقرب إلى:

$$\left[ \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

مثال

من مجموعة كبيرة من الحسابات اختيرت عينة عشوائية من 200 منها حيث وجد أن 18 حسابا من تلك العينة غير منتظمة. أوجد فترة الثقة عند مستوى 95% لنسبة عدم الانتظام في مجموعة الحسابات.

الحل

نسبة عدم الانتظام في العينة هي:

$$\hat{p} = \frac{18}{200} = 0.09$$

إذن تقديرنا للخطأ المعياري للنسبة هو:

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.09 \times 0.91}{200}} = 0.0202$$

إذن فترة الثقة عند مستوى 95% لنسبة عدم الانتظام في مجموعة الحسابات هي:

$$[0.09 - (1.96 \times 0.0202), 0.09 + (1.96 \times 0.0202)]$$

أي:

$$[0.05, 0.130]$$

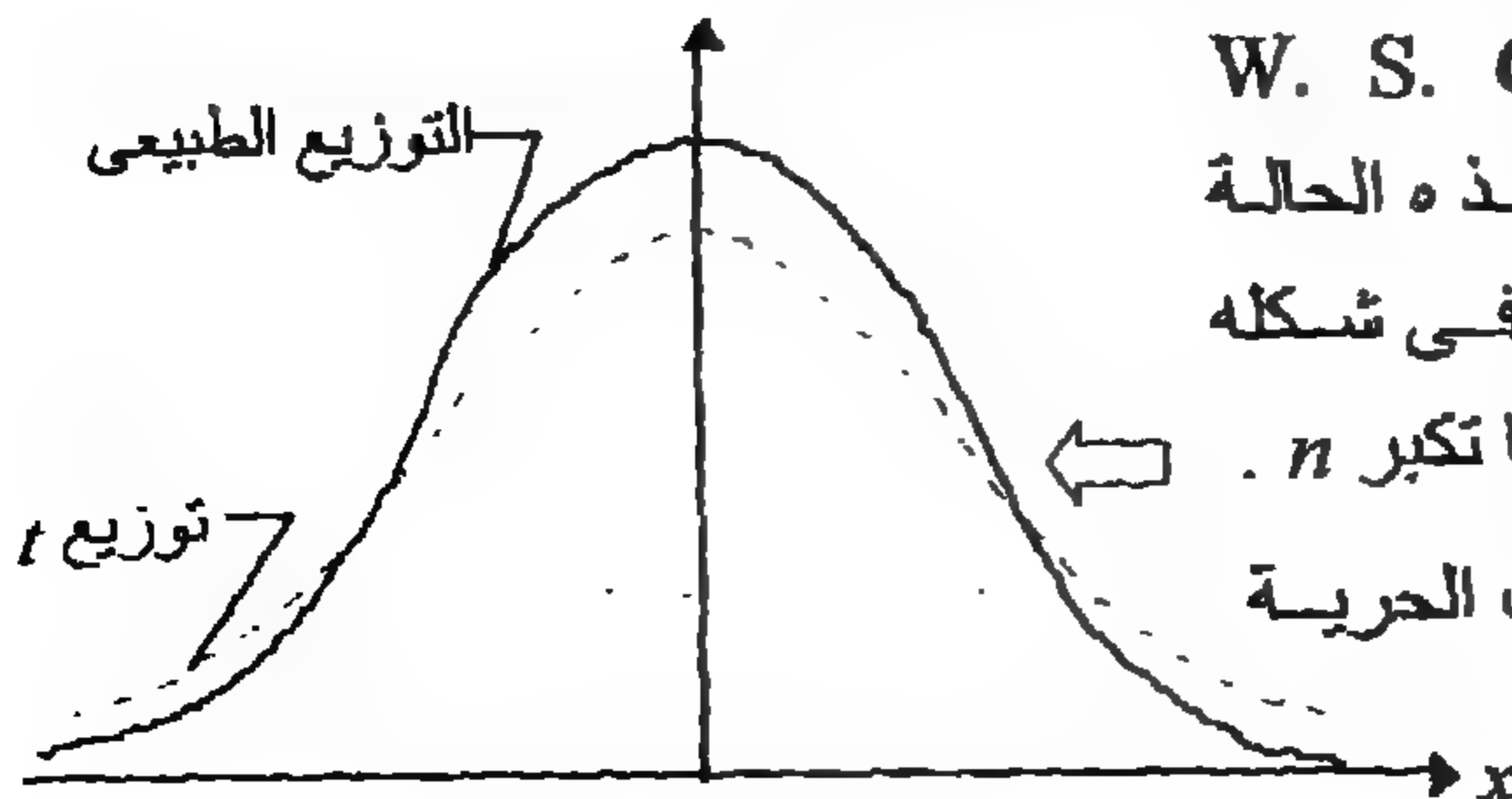
### ٨-٣ التقدير للعينات صغيرة الحجم Small Sample Estimation

حتى الآن فرضنا أنه في حالة عينة حجمها  $n$  فإن الخطأ المطلق بين متوسط العينة والمتوسط الحقيقي للمجتمع  $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$  يتبع توزيعا طبيعيا حتى نحصل على فترة

الثقة لتقدير متوسط المجتمع  $\mu$ . وكما رأينا فإن الانحراف المعياري  $\sigma$  للمجتمع

لا يكون معلوما ونحتاج إلى استبداله بالتقدير غير المتحيز  $\hat{\sigma}$  بشرط أن يكون حجم

العينة  $n$  كبيرا كبرا كافيا. ولكن ماذا يحدث عندما يكون حجم العينة  $n$  صغيرا؟



لقد ابتكر لنا الإحصائي W. S. Gosset

توزيعا إحصائيا يكون ملائما لهذه الحالة

ويعرف بتوزيع  $t$  الذي يشبه في شكله

التوزيع الطبيعي ويؤول إليه عندما تكبر  $n$ .

ولتوزيع  $t$  جداول عند درجات الحرية

المختلفة  $v = n - 1$ .



مثال

يراد تقييم 900 من مبيعات شركة. ولعدم توفر الوقت الكافي أخذت عينة عشوائية تحتوى 18 منها حيث وجدت القيم الآتية (بالجنيه) للمبيعات:

45	58	49	70	38	80
38	15	50	40	45	75
35	43	100	44	41	34

أوجد الآتى:

- (أ) تقدير المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع.  
 (ب) تقدير نقطى للمبيعات كلها.  
 (ج) فترة الثقة عند مستوى 95% لتقدير إجمالي المبيعات.

الحل

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{900}{18} = \text{L.E. } 50 \quad (أ)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{17} (51800 - 45000)} = \text{L.E. } 2 \quad (ب)$$

$$900 \times 50 = \text{L.E. } 45,000$$

- (ج) حيث أن العينة صغيرة ( $n = 18$ ) فإن التوزيع المناسب هو توزيع  $t$  بدرجة حرية  $17 = 18 - 1$ .

نبحث فى جدول توزيع  $t$  تحت القيمة 5% عند درجة حرية 17 فنجد القيمة 2.11.

v	Two-tailed tests					v
	10%	5%	2%	1%	0.1%	
15	1.75	2.13	2.60	2.95	4.07	15
16	1.75	2.12	2.58	2.92	4.01	16
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.96	17
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.92	18
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.88	19
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.85	20

إذن فترة الثقة لتقدير المتوسط هي:

$$\left[ \bar{x} - t \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 50 - \frac{2.11 \times 20}{\sqrt{18}}, 50 + \frac{2.11 \times 20}{\sqrt{18}} \right] = [40.05, 59.95]$$

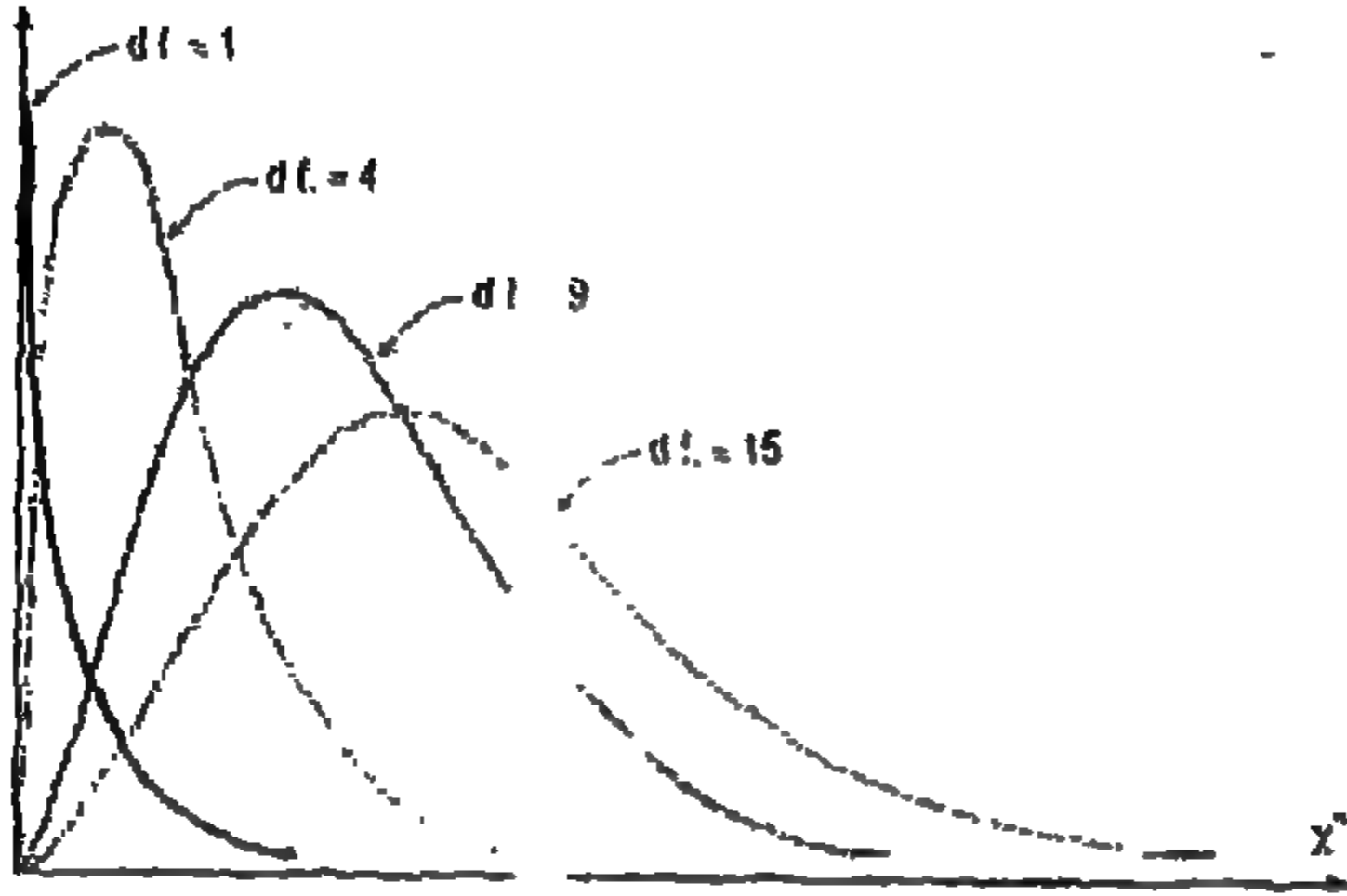
إذن فترة الثقة لتقدير إجمالي المبيعات هي:

$$[40.05 \times 900, 59.95 \times 900] = \text{L.E. } [36,045, 53,955]$$

### ٩-٣ تقدير التباين على فترة Interval Estimation of the Variance

في الإنتاج فإن التباين والانحراف المعياري يشكلان أهمية كبرى؛ فمثلا عند تصنيع المواسير والمسامير المقلوطة والصواميل فلا بد أن يكون تباين الأقطار أقل ما يمكن حتى يكون التركيب سليما وإلا فإن مآلها إلى التكهين. وعند تصنيع الأدوية فإن التباين والانحراف المعياري يلعبان دورا مهما حتى نضمن أن المرضى المتعاطين لتلك الأدوية يأخذون الجرعات المناسبة.

لذا فإن حساب فترات الثقة للتباين والانحراف المعياري من الضرورة بمكان. ولحساب فترات الثقة هذه، فإننا نستخدم توزيعا احتماليا يسمى "كاي تربيع"  $\chi^2$ .



وهذا التوزيع يعتمد على درجة الحرية

$v = n - 1$  حيث  $n$  حجم العينة.

ويبين الشكل المقابل توزيع  $\chi^2$

لبعض درجات الحرية.  $\hookleftarrow$

هذه، وتوجد جداول لتوزيع  $\chi^2$

لدرجات حرية مختلفة.

وبلاحظ أن توزيع  $\chi^2$  لا يأخذ قيما سالبة وأنه ملتو جهة اليمين. وعندما ما تصل درجة الحرية إلى ما يقرب من 100 فإن التوزيع يكون متماثلا تقريبا. وبالعكس فإن المساحة تحت المنحنى تساوي 1.00.

وتستخدم قيم توزيع  $\chi^2$  في مقام الصيغة الرياضية لفترات ثقة التباين حيث توجد قيمتان إحداهما تقع جهة اليمين من الجدول والأخرى جهة اليسار منه.

فمثلا لإيجاد قيمتي الجدول المناظرتين لمستوى ثقة 95% نحولها إلى القيمة العشرية 0.95 ونطرحها من 1 فنحصل على 0.05 ثم نقسم على 2 فتصبح القيمة 0.025 ومن الجدول نحصل على  $\chi^2_{right}$ . وللحصول على  $\chi^2_{left}$  نطرح 0.025 من 1 فنحصل على 0.975 ومن الجدول نحصل على  $\chi^2_{right}$ .

وبفس الطريقة يمكن أن نحصل على  $\chi^2_{left}$  ،  $\chi^2_{right}$  المناظرتين لمستويات الثقة الأخرى مثل 90% ، 99%.

مثال

أوجد  $\chi^2_{left}$  ،  $\chi^2_{right}$  المناظرتين لمستوى الثقة 90% عندما يكون حجم العينة 25.

الحل

$$1 - 0.90 = 0.10 , 0.10/2 = 0.05 , 1 - 0.05 = 0.95 , v = 24$$

نبحث في الجدول عن  $\chi^2_{left}$  ،  $\chi^2_{right}$  كالآتي:

n	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	n
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
24	<del>9.89</del>	<del>10.9</del>	<del>12.4</del>	<u>13.8</u>	<del>15.7</del>	<del>33.2</del>	<u>36.4</u>	39.4	43.0	45.6	51.2	24
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	25
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	26
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	27

من الجدول نجد أن:

$$\chi^2_{\text{right}} = 36.415 , \chi^2_{\text{left}} = 13.848$$

لإيجاد فترة الثقة للتباين نستخدم الصيغة:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\text{right}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\text{left}}}$$

ولإيجاد فترة الثقة للانحراف المعياري نستخدم الصيغة:

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\text{right}}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\text{left}}}}$$

مثال (١)

أوجد فترة ثقة بمستوى 95% للتباين والانحراف المعياري لمحتوى النيكوتين للسيجائر المصنعة في مصنع للسيجائر إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها 20 سيجارة حيث وجد الانحراف المعياري لها 1.6 ملليجرام.

الحل

حيث أن مستوى الثقة هو 95% ، إذن  $\alpha = 0.05$  . لإيجاد القيمتين الحرجتين نحسب  $\chi^2_{\text{right}}$  ،  $\chi^2_{\text{left}}$  من الجدول كالتالي:

v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
19	<del>6.84</del>	<del>7.63</del>	<u>8.91</u>	<del>10.1</del>	<del>11.7</del>	<del>27.2</del>	<del>30.1</del>	<u>32.9</u>	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22

من الجدول نجد أن:

$$\chi^2_{\text{right}} = 32.852 , \chi^2_{\text{left}} = 8.907$$

إذن فترتا الثقة للتباين والانحراف المعياري هما:



$$\sqrt{\frac{(20-1)(1.6)^2}{32.852}} < \sigma < \sqrt{\frac{(20-1)(1.6)^2}{8.907}}, \quad \frac{(20-1)(1.6)^2}{32.852} < \sigma^2 < \frac{(20-1)(1.6)^2}{8.907}$$

أى:

$$1.2 < \sigma < 2.3$$

$$1.5 < \sigma^2 < 5.5$$

مثال (٢)

البيانات الآتية تمثل قيم الإيجار اليومي بالدولار لعدد 9 شاليهات اختيرت عشوائيا بمنتجات بمنطقة العين السخنة:

59 54 53 52 39 49 47 49 48

أوجد فترة الثقة للانحراف المعياري بمستوى 90%.

الحل

تقدير تباين المجتمع من البيانات المعطاه بحسب كالاتى:

$$\bar{X} = \frac{59+54+53+52+39+49+47+49+48}{9} = \frac{450}{9} = 50$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{9^2+4^2+3^2+2^2+11^2+1^2+3^2+1^2+2^2}{8} = \frac{81+16+9+4+121+1+9+1+4}{8} = 30.75$$

وحيث أن مستوى الثقة هو 90% ، إذن  $\alpha = 0.10$  . لإيجاد القيمتين الحرجتين نحسب

$\chi^2_{left}$  ،  $\chi^2_{right}$  من الجدول كالاتى:

P %												
v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	7
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	8
9	1.73	2.00	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11

من الجدول نجد أن:

$$\chi^2_{right} = 16.919, \quad \chi^2_{left} = 3.325$$

إذن فترة الثقة للانحراف المعياري هي:

$$\sqrt{\frac{(9-1)(30.75)}{16.919}} < \sigma < \sqrt{\frac{(9-1)(30.75)}{3.325}}$$

أى:

$$\sqrt{14.54} < \sigma < \sqrt{73.99}$$

أى:

$$3.81 < \sigma < 8.60$$

### تمرين ١٣

١. ما الفرق بين التقدير لمعلمة من معالم مجتمع ما عند نقطة والتقدير على فترة. من منهما الأفضل؟ لماذا؟
٢. ما هي المعلومات الضرورية لحساب التقدير على فترة؟
٣. ما هو الخطأ الأعظم للتقدير؟
٤. ماذا يقصد بالتعبير "مستوى ثقة 95% لتقدير المتوسط على فترة".
٥. ما هي الصفات الثلاث التي يجب أن تتوفر للمقدر الجيد للمتوسط؟
٦. ما هي إحصاءة لتقدير المتوسط  $\mu$  لمجتمع؟
٧. ما هي المطالب لتحديد حجم العينة؟ هل يكون حجم المجتمع مهماً في هذا التحديد؟
٨. أوجد  $z_{\alpha/2}$  لكل من الحالات الآتية:  
(أ) فترة ثقة على مستوى 99% (ب) فترة ثقة على مستوى 95%  
(ج) فترة ثقة على مستوى 98% (د) فترة ثقة على مستوى 95%  
(هـ) فترة ثقة على مستوى 90% (و) فترة ثقة على مستوى 94%
٩. تباع تركيبة غذائية في عبوات أوزانها تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 502 جرام وانحراف معياري 3.75 جرام. اختيرت عينة عشوائية من 16 عبوة. قُدِّر احتمال أن يكون متوسط أوزان عبوات العينة أقل من 500 جرام.
١٠. أخذت عينة عشوائية من 400 محاسب مؤهل ووجد أن متوسط مرتباتهم السنوى 12000 جنيه وانحراف معياري 3000 جنيه. احسب الخطأ المعياري للمتوسط وقدر فترة ثقة عند مستوى 99% لمتوسط المرتبات.
١١. أخذت عينة عشوائية حجمها 35 من درجات القراءة لتلاميذ الصف الخامس

الابتدائي فوجد أن المتوسط يساوي 82 بانحراف معياري 15 درجة. أوجد فترة الثقة لدرجات القراءة للتلاميذ عند مستوى ثقة:

(أ) 95% (ب) 99%

١٢. ليكن  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها  $n$  فوجد أن المتوسط يساوي 30 والتباين 100. احسب فترة الثقة للمتوسط بمستوى 95% لكل من أحجام العينة الآتية:

(أ) 1 (ب) 4 (ج) 16

١٣. ليكن  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها  $n$  فوجد أن المتوسط يساوي 100 والتباين 225.75. احسب فترة الثقة للمتوسط بمستوى 95% لكل من أحجام العينة الآتية:

(أ) 30 (ب) 50 (ج) 100

١٤. ليكن  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 50 فوجد أن المتوسط يساوي 30 والتباين 98. احسب فترة الثقة للمتوسط بمستوى:

(أ) 90% (ب) 97.5% (ج) 99.5%

١٥. ليكن  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 9 فوجد أن المتوسط يساوي 25. فإذا علم أن تباين المجتمع يساوي 24، فاحسب فترة الثقة لتقدير  $\mu$  بمستوى:

(أ) 75% (ب) 86.6% (ج) 98%

١٦. عينة حجمها 16 من مجتمع أسفرت عن  $\bar{x} = 14.5$ ، قدر فترة الثقة للمتوسط  $\mu$  بمستوى 95%.



١٧. اختيرت عينة حجمها 100 من فواتير مبيعات فجاء تصنيفها كالاتي:

قيمة الفاتورة	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-125	125-150	150-200
عدد الفواتير	8	17	25	20	15	8	5	2

قدر فترة الثقة لمتوسط الفواتير الكلية  $\mu$  بمستوى 95% ومستوى 99%.

### تمرين ٣ ب

١. ما هي خصائص توزيع  $t$ ؟ ما المقصود بدرجة الحرية؟ متى يجب أن يستخدم توزيع

$t$  لإيجاد فترة الثقة للمتوسط؟

٢. أوجد كلا مما يأتي:

(أ)  $t_{\alpha/2}$  عند  $n = 18$  ومستوى ثقة 99% للمتوسط.

(ب)  $t_{\alpha/2}$  عند  $n = 23$  ومستوى ثقة 95% للمتوسط.

(ج)  $t_{\alpha/2}$  عند  $n = 15$  ومستوى ثقة 98% للمتوسط.

(د)  $t_{\alpha/2}$  عند  $n = 10$  ومستوى ثقة 90% للمتوسط.

(هـ)  $t_{\alpha/2}$  عند  $n = 20$  ومستوى ثقة 95% للمتوسط.

٣. متوسط الهيموجلوبين لعينة عشوائية حجمها 20 من المدرسين هي 20 جرام/100

مليلتر والانحراف المعياري 2 جرام/100 مليلتر. قدر فترة الثقة للمتوسط الحقيقي

بمستوى 99%.

٤. أخذت 17 ولاية أمريكية كعينة فوجد أن الضرائب على السجائر بالسنت هي:

112	120	98	55	71	35	99	124	64
150	150	55	100	132	20	70	93	

قدر فترة الثقة لمتوسط تلك الضريبة في الولايات المتحدة الأمريكية بمستوى 98%.

## تمرين ٣ ج

١. في كل من الحالات الآتية أوجد  $\hat{p}$  ،  $\hat{q}$  :

(أ)  $X = 40$  ،  $n = 80$  (ب)  $X = 90$  ،  $n = 200$

(ج)  $X = 60$  ،  $n = 130$  (د)  $X = 35$  ،  $n = 60$

(هـ)  $X = 43$  ،  $n = 95$

٢. أوجد  $\hat{p}$  ،  $\hat{q}$  لكل من النسب الآتية:

(أ) 12% (ب) 29% (ج) 65% (د) 53% (هـ) 67%

٣. في مراجعة نهائية لعدد 12,143 فاتورة مبيعات لشركة تجارية خلال عام اختيرت 200 فاتورة عشوائيا وروجعت مراجعة دقيقة وصنفت وأسفر ذلك عن البيانات الآتية:

عدد الأخطاء بالفاتورة			عدد الفواتير	عدد البنود
2	1	0		
2	2	60	64	1-5
8	8	74	90	6-10
6	8	32	46	10 -
			200	المجموع

المطلوب تقدير فترة ثقة نسبة الفواتير الكلية التي تحتوى على خطأ واحدا على الأقل بمستوى 95%.

٤. أظهرت دراسة حديثة على 100 في مدينة ما أن 27 منهم يتصفون بالبدانة. قدر بمستوى ثقة 90% لنسبة البدانة في مجتمع المدينة.

٥. وجد أن نسبة الذين يتلقون تعليمهم في مدارس خاصة هي 11%. أخذت عينة عشوائية من 450 طالبا وطالبة في مساحة جغرافية معقولة فوجد أن منهم 55

يدرسون في مدارس خاصة. قدر بمستوى ثقة 95% النسبة الحقيقية للذين يتلقون تعليمهم في مدارس خاصة.

٦. في دراسة على عينة من 200 من العاملين في شركة ما قرر 168 منهم أنهم يقاطعون مرتين أو ثلاثا في الساعة أثناء عملهم برسائل المحمول أو الفاكسات... إلخ. أوجد بمستوى ثقة 90% فترة نسبة العاملين الذين يقاطعون مرتين أو ثلاثا في الساعة أثناء عملهم.

٧. في دراسة على عينة من 80 من حوادث الطرق المميتة وجد أن 46 منها ناتج عن تعاطي المخدرات. قدر بمستوى 95% فترة نسبة الحوادث المميتة لهذا السبب.

٨. في استطلاع رأى لـ 1005 من الأفراد قرر 452 منهم أنهم أسوأ حالا ماديا من العام الماضي. قدر بمستوى 95% فترة نسبة الأفراد الأسوأ حالا ماديا هذا العام.

٩. يريد باحث في العقاقير أن يقدر نسبة الإناث الذين يتناولون الفيتامينات. ويريد هذا الباحث أن يكون على ثقة بمستوى 99% أن يكون تقديرة صحيحة في حدود 2% من النسبة الصحيحة. وقد أظهرت دراسة حديثة أنه بين 180 من الإناث فإن 25 منهم يتناولون الفيتامينات.

(أ) كم يجب أن يكون حجم العينة؟

(ب) إذا لم يتوافر تقدير للنسبة من العينة كم يكون حجم العينة عندئذ؟

١٠. أظهرت دراسة أن 29 من كل 100 سيدة فوق الـ 55 عاما أرامل.

(أ) كم يجب أن يكون حجم العينة حتى نكون على ثقة بنسبة 90% أن

تقديرنا لنسبة الأرامل في حدود 0.05 من النسبة الصحيحة؟

(ب) إذا لم يتوافر تقدير للنسبة من العينة كم يكون حجم العينة عندئذ؟



### تمرين ٣د

١. ما هو التوزيع الإحصائي الذى يجب استخدامه لحساب فترات الثقة للتباين والانحراف المعياري؟ وما هي الفروض الواجب افتراضها عند حساب تلك الفترات؟
٢. باستخدام جدول توزيع  $\chi^2$  أوجد  $\chi^2_{right}$ ،  $\chi^2_{left}$  لكل من الحالات الآتية:  
(أ)  $\alpha = 0.05, n = 16$  (ب)  $\alpha = 0.10, n = 5$   
(ج)  $\alpha = 0.01, n = 23$  (د)  $\alpha = 0.05, n = 29$   
(هـ)  $\alpha = 0.10, n = 14$
٣. قدر بمستوى ثقة 95% فترتي التباين والانحراف المعياري لأعمار البطاريات بالشهر لعينة عشوائية من 20 بطارية إذا علمت أن الانحراف المعياري هو 1.7 شهرا. [افترض أن الأعمار تتبع توزيعا طبيعيا].
٤. قدر بمستوى ثقة 90% فترتي التباين والانحراف المعياري للزمن الذى يأخذه منفذ أمني في تفتيش الحافلات إذا علمت أن في عينة من 27 حافلة كان الانحراف المعياري هو 6.5 دقيقة. [افترض أن الأزمان تتبع توزيعا طبيعيا].
٥. قدر بمستوى ثقة 99% فترتي التباين والانحراف المعياري لأحجام شحنة من عبوات الزيوت سعة 2 لتر إذا أخذنا عينة من 14 عبوة ووجد أن الانحراف المعياري هو 0.12 لتر. [افترض أن الأحجام تتبع توزيعا طبيعيا].
٦. أعلنت محطة خدمة سيارات أن العميل لن يأخذ أكثر من 30 دقيقة لتغيير زيت السيارة. أخذت عينة عشوائية من 28 حالة تغيير الزيوت فوجد أن الانحراف المعياري هو 5.2 دقيقة. قدر بمستوى ثقة 95% فترة الانحراف المعياري.

## الباب الرابع اختبارات الفروض لمتغير واحد

### TESTING OF HYPOTHESES OF ONE VARIABLE

#### ٤-١ مقدمة

لطالما اهتم الباحثون بالإجابة على أنواع من الأسئلة منها:

- قد يتساءل علماء الفيزياء عما إذا كانت ظاهرة الاحتباس الحرارى تدل على أن الأرض تتجه نحو الدفئ.
- قد تريد شركة أدوية معرفة إذا كان استخدام عقار معين يخفض من ضغط الدم عند المريض.
- قد يريد باحث تربوى التثبت من أن استخدام تقنية حديثة في التدريس أفضل من استخدام التقنيات الكلاسيكية.
- قد يريد بيت من بيوت الأزياء أن يعرف هل استخدام ألوان معينة يجعل الأزياء أكثر قبولا لدى المشتري؟
- قد تريد شركة تصنيع سيارات التأكد من أن استخدام الحزام فى السيارة أكثر أمانا للراكب.

- قد يريد مصنع لإنتاج الصواميل أن يتأكد من أن الانحراف المعيارى لأقطار تلك الصواميل لا يتجاوز ٠,١ من المليمتر.
- قد يريد عالم نفسى التأكد من أن مستوى الذكاء عند البنين لا يختلف عن مستوى الذكاء عند البنات فى نفس المرحلة العمرية.
- مثل تلك التساؤلات يجيب عليها الإحصائيون مستخدمين ما يسمى "اختبار الفروض" وهى سبيل من سبل اتخاذ القرار. وبالطبع فإن الأسئلة المراد الإجابة عليها تخص مجتمعا ما ولكن الباحث الإحصائى لا يستطيع إجراء الاختبار على المجتمع بأكمله ولا بد له من عينة ممثلة للمجتمع لإجراء الاختبار الإحصائى عليها.
- وسيكون علينا فى هذا العرض أن نعرف الخطوات التى نتبعها حتى نتوصل إجابة مثل تلك الأسئلة.

#### ٤-٢ خطوات اختبار الفروض

١. تعريف المجتمع قيد الدراسة وتحديد الفروض.
٢. تحديد مستوى المعنوية ويقصد به درجة الدقة التى تكون بها إجابة السؤال صحيحة.
٣. اختيار عينة ممثلة للمجتمع لإجراء الدراسة عليها.
٤. جمع البيانات اللازمة للدراسة.
٥. إجراء حسابات الاختبار الإحصائى.
٦. التوصل إلى نتيجة (أى إجابة السؤال المطروح) فى حدود مستوى المعنوية المفترض.

وقد سبق لنا دراسة الخطوتين ٣ ، ٤ . لذا فإننا سنقتصر على إجراء الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى. تحديد الفروض التي سنتحقق من إحداها

الخطوة الثانية تحديد مستوى المعنوية

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي

الخطوة الرابعة التوصل لاختيار فرض من الفروض

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح.

٣ - ٤ تحديد فروض الاختبار الإحصائي

هناك نوعان من الفروض لكل حالة من حالات اختبار الفروض:  
فرض العدم:

وهو الفرض بأن معلما من معالم مجتمع ما ( متوسط، تباين، ... إلخ) يظل ثابتا عند قيمة معينة أو أن معلما ما يأخذ قيمة متطابقة في مجتمعين أو أكثر. وسوف نرمز لفرض العدم بالرمز  $H_0$ .

الفرض البديل :

وهو الفرض بأن معلما من معالم مجتمع ما يختلف عن قيمة معينة أو أن معلما ما يأخذ قيمة مختلفة في مجتمعين أو أكثر. وسوف نرمز للفرض البديل بالرمز  $H_1$ .

مثال (٣)

يعتقد المدير الإداري لمستشفى أن الانحراف المعياري لعدد الذين يترددون على العيادات الخارجية يزيد على الانحراف المعياري المعتاد وهو 8. أكتب فرض العدم والفرض البديل.

في هذه الحالة فإن المجتمع الذي نجرى الاختبار عليه هو المجتمع الذي نريد الاختبار عليه هو مجموعة المرضى الذين يترددون على العيادات الخارجية والمعلم الذي نريد اختباره هو التباين  $\sigma^2$ . وعلى ذلك فرض العدم هو:

$$H_0 : \sigma^2 \leq 64$$

أما الفرض البديل فيكون:

$$H_1 : \sigma^2 > 8$$

مثال (٢)

يدعى كيميائي أنه قد توصل إلى مادة كيميائية، إذا أضيفت إلى بطانة الحوائط فإنها تعزلها بدرجة كافية بحيث تقلل قيمة فاتورة الكهرباء بدرجة ملحوظة. وتفكر شركة بناء تجريب هذا الاختراع لتعرف صحة الادعاء من عدمه. [متوسط فواتير الكهرباء لمثل تلك المساكن هو 78 LE].

في هذه الحالة فإن المجتمع الذي نريد أن نجرى الاختبار عليه هو مجموعة المساكن التي تستخدم هذا المركب ويكون المعلم هو متوسط استهلاك الكهرباء  $\mu$ . وعلى ذلك فرض العدم هو:

$$H_0 : \mu \geq 78$$

أما الفرض البديل فيكون:

$$H_1 : \mu < 78$$

مثال (١)

يريد باحث أن يعرف إذا كان استخدام عقار معين له تأثير جانبي على متعاطيه من المرضى، وهو مهتم بصفة خاصة بمعدل نبض المريض: هل يزيد أو ينقص أو يظل كما هو؟ [معدل نبض الشخص العادي هو 82 نبضة في الدقيقة].

في هذه الحالة فإن المجتمع الذي نجرى الاختبار عليه هو مجموعة المرضى الذين يتعاطون هذا العقار، والمعلم الذي نريد اختباره  $\mu$  هو متوسط معدل النبض. وعلى ذلك يكون فرض العدم هو:

$$H_0 : \mu = 82$$

أما الفرض البديل فيكون:

$$H_1 : \mu \neq 82$$



#### ٤-٤ تصميم الدراسة الإحصائية

بعد تحديد فرض العدم والفرض البديل فإن الباحث الإحصائي يضع تصميمًا للدراسة الإحصائية التي سيقوم بها. وفي هذا الصدد فإنه يختار الاختبار الإحصائي الملائم للمعلم ثم يختار مستوى مناسبًا للمعنوية.

#### ٤-٤-١ الاختبارات الإحصائية المتداولة

بادئ ذي بدء فإننا نستطيع القول بأن الاختبار الإحصائي يستخدم البيانات التي نحصل عليها من عينة أو أكثر لتأخذ قرارًا هل تقبل أو نرفض فرض العدم. وتبنى معظم الاختبارات الإحصائية للفروض على القاعدة العامة الآتية:

$$\frac{\text{القيمة المشاهدة} - \text{القيمة المتوقعة}}{\text{الخطأ المعياري}} = \text{القيمة الاختبارية}$$

وستعرض في دراستنا لعدة اختبارات إحصائية طبقًا للمعالم المراد إجراء الاختبارات عليها:

- إذا كان المعلم المراد إجراء الاختبار عليه هو المتوسط الحسابي لمجتمع ما فإن الاختبار المناسب هو اختبار  $z$  أو اختبار  $t$  وفقًا لقاعدة سنذكرها في حينها.
- إذا كان المعلم المراد إجراء الاختبار عليه هو التباين لمجتمع ما فإن الاختبار المناسب هو اختبار  $F$ .
- إذا كنا بصدد المقارنة بين متوسطين حسابيين، لمجتمعين مستقلين فإن الاختبار المناسب هو اختبار  $z$ .

#### ١١-٤-٢ مستوى المعنوية

في اختبار الفروض إما أن يكون فرض العدم صحيحًا أو خاطئًا وفي نفس الوقت لكل من هاتين الحالتين إما أن نقبل فرض العدم أو نرفضه. إذن توجد أربع حالات مبينة بالجدول الآتي:

فرض العدم صحيح	فرض العدم خاطئ
نقبل فرض العدم	
نرفض فرض العدم	

ويكون حكمنا صحيحًا إذا كان فرض العدم صحيحًا وقبلناه أو إذا كان خاطئًا ورفضناه. أما في الحالتين الأخريين فنكون قد ارتكبنا خطأ في حكمنا وذلك حسب الجدول الآتي:

فرض العدم صحيح	فرض العدم خاطئ
الحكم صائب	خطأ من النوع الثاني
خطأ من النوع الأول	الحكم صائب

ويقصد بمستوى المعنوية الحد الأقصى لارتكابنا خطأ من النوع الأول بالنسبة

لفرض العدم ويرمز له بالرمز  $\alpha$ . أي أن:

$$\alpha = P(\text{type I error})$$

أما إذا ارتكبنا خطأ من النوع الثاني فإن الحد الأقصى لاحتمال ارتكابنا لهذا الخطأ

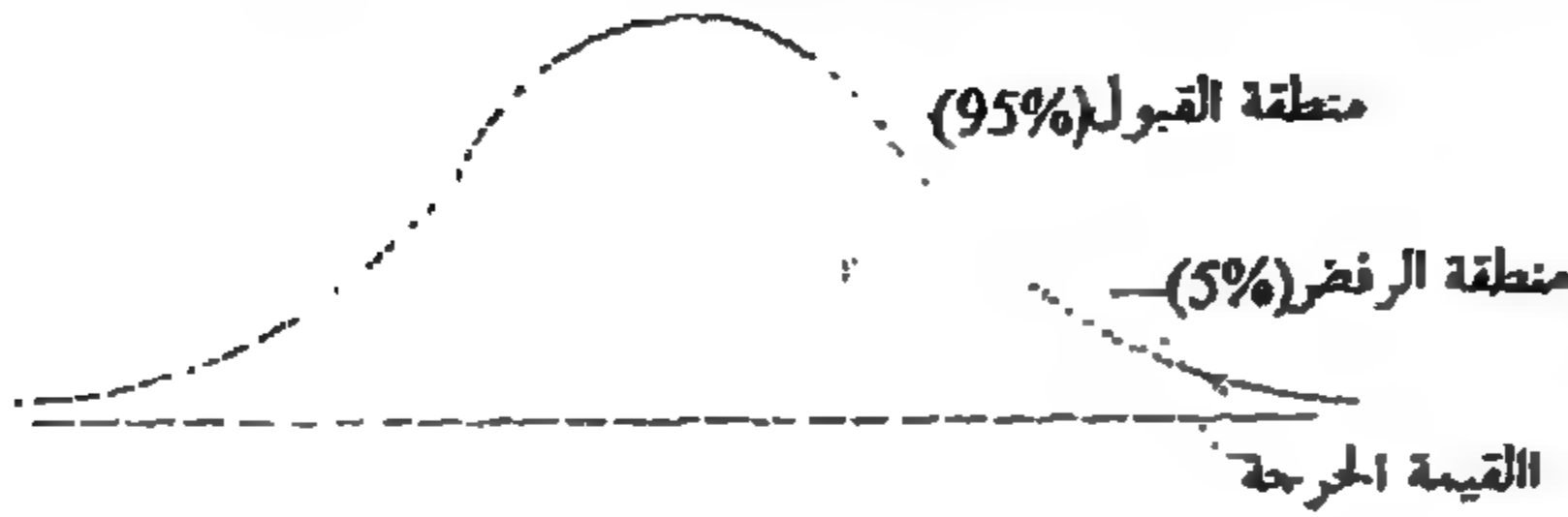
فنرمز له بالرمز  $\beta$ . أي أن:

$$\beta = P(\text{type II error})$$

وسنكون معنيين في الدراسة الحالية بقيمة  $\alpha$ . وإذا حددنا مستوى معنوية  $\alpha$  فإننا ننظر في جدول التوزيع الإحصائي المناسب حتى نوجد "القيمة الحرجة"، *'critical value'* (C.V.) المناسبة وهذه القيمة تقسم التوزيع الإحصائي إلى منطقتين: "منطقة الرفض" *'rejection region'* ، "منطقة القبول" *'acceptance region'*.

مثال (١)

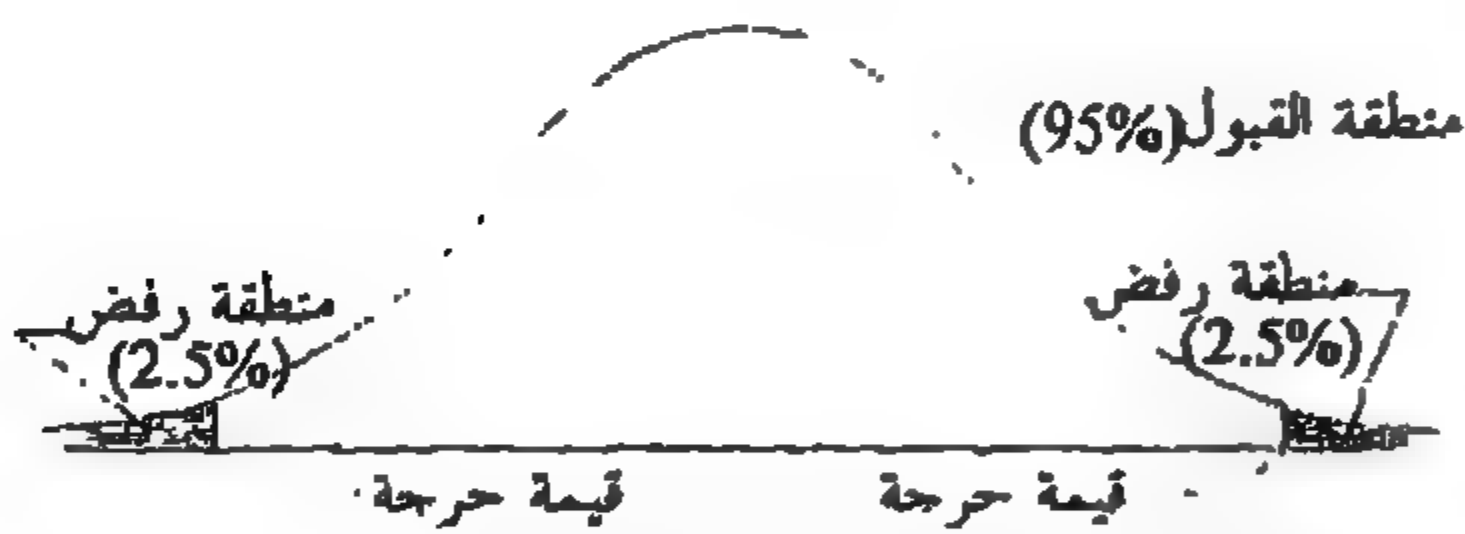
ليكن مستوى المعنوية هو 0.05 وليكن التوزيع الإحصائي هو توزيع  $z$  الطبيعي. نرسم كروكيا يبين التوزيع الطبيعي. وهنا تبرز ثلاث حالات:



(أ) عندما تكون الإشارة في الفرض البديل هي ">" ويقال عندها أن الاختبار ذو ذيل أيمن *right tailed*.



(ب) عندما تكون الإشارة في الفرض البديل هي "<" ويقال عندها أن الاختبار ذو ذيل أيسر *left tailed*.



(ج) عندما تكون الإشارة في الفرض البديل هي " $\neq$ " ويقال عندها أن الاختبار ذو ذيلين *two tailed*. (لاحظ تقسيم مستوى المعنوية على الطرفين بالتساوي).

والآن بالنظر إلى جدول التوزيع الطبيعي ( $z$ -distribution : tail values) فنجد الآتي:

في الحالة (أ) ، (ب) نبحث في وسط الجدول عن أقرب عدد للقيمة 0.05 فنجد 0.0445 وهو عند تقاطع الصف أمام 1.6 والعمود تحت 0.05 فنستنتج أن القيمة الحرجة هي 1.65.

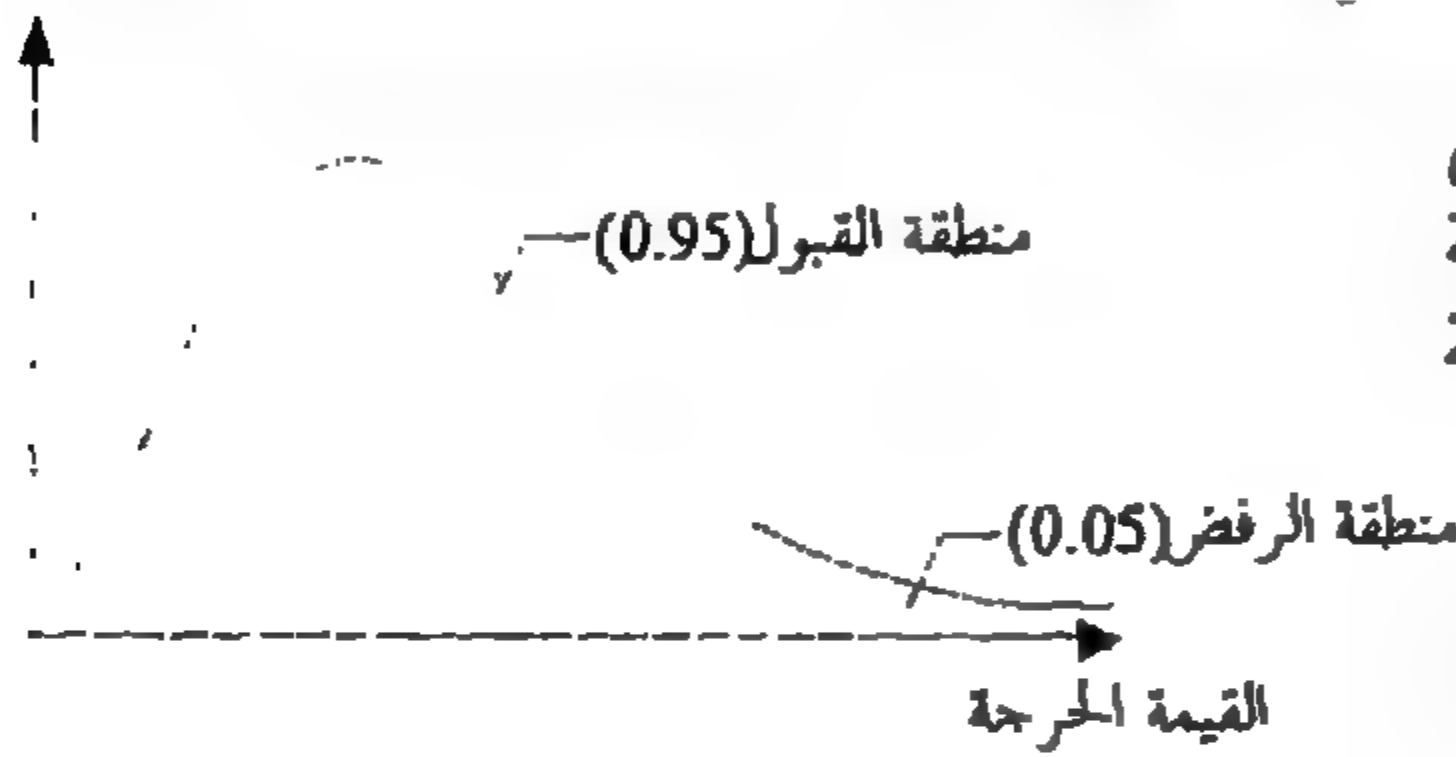
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0445	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233

في الحالة (ج) نبحث في وسط الجدول عن القيمة 0.025 فنجد 0.0445 وهو عند تقاطع الصف أمام 1.9 والعمود تحت 0.06 فنستنتج أن القيمة الحرجة هي  $\pm 1.96$ .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0445	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233

مثال (٢)

ليكن مستوى المعنوية هو 0.05 وليكن التوزيع الإحصائي هو توزيع  $\chi^2$  بدرجة حرية 15 وليكن الاختبار ذو ذيل جهة اليمين. ننظر في جدول توزيع في الصف أمام 15 والعمود تحت 0.05 فنجد القيمة الحرجة 24.996.



جدول  $\chi^2$

v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17

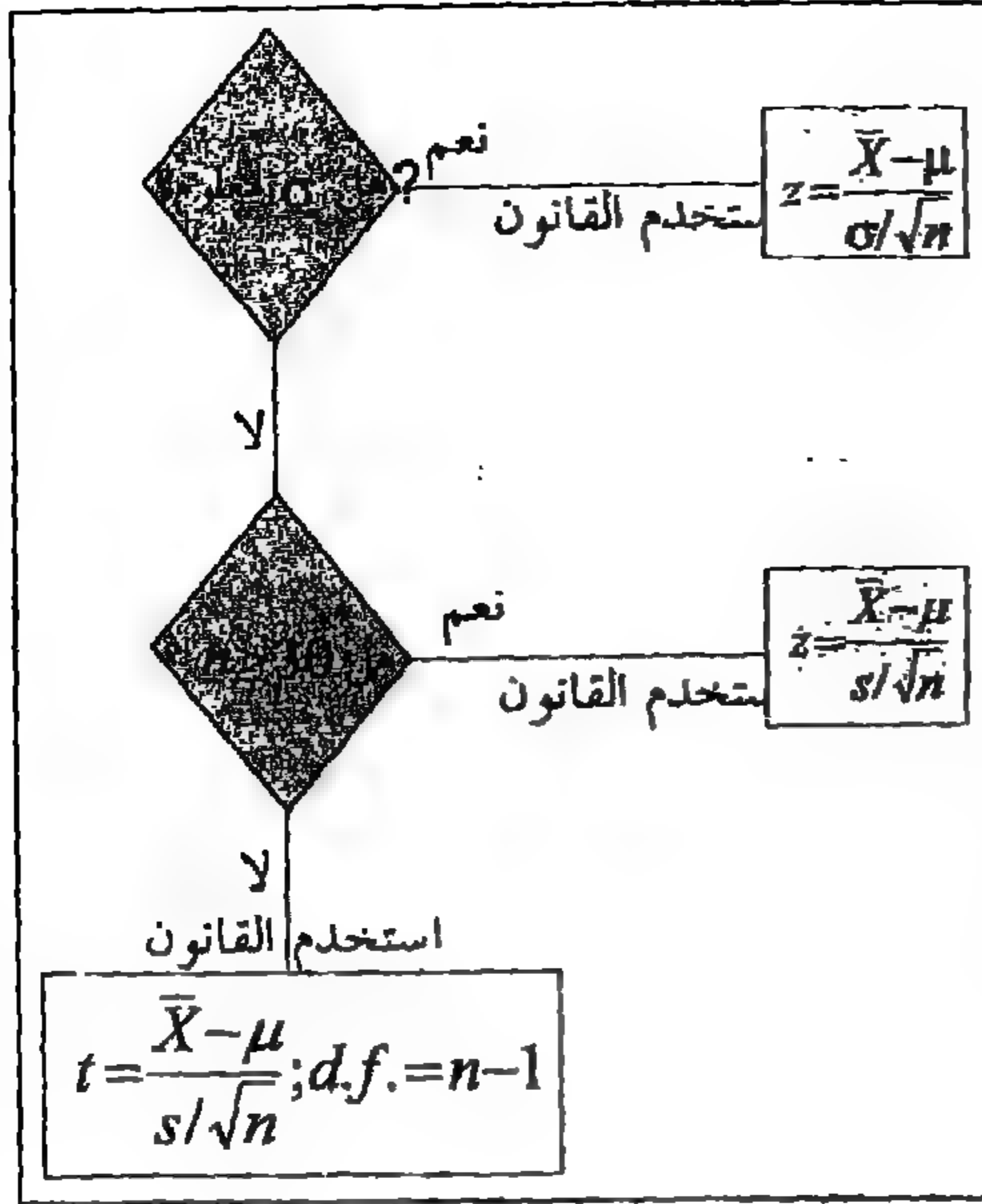
١١- ٥ اختبار الفروض للوسط الحسابي

اتفق علماء الإحصاء أن الاختبار الإحصائي المناسب هنا هو إما اختبار z أو اختبار t وفقاً للقاعدة الآتية:

➤ إذا كان الانحراف المعياري  $\sigma$  للمجتمع موضوع الدراسة معلوم فإننا نستخدم اختبار z بالقانون:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

حيث  $\bar{X}$  الوسط الحسابي للعينة،  $\mu$  الوسط الحسابي للمجتمع،  $n$  حجم العينة.



➤ إذا كان الانحراف المعياري  $\sigma$  للمجتمع موضوع الدراسة غير معلوم وكان حجم العينة المستخدمة أكبر من أو يساوي 30 فإننا نستخدم اختبار  $z$  بالقانون:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

حيث  $s$  الانحراف المعياري للعينة.

➤ إذا كان الانحراف المعياري  $\sigma$  للمجتمع موضوع الدراسة غير معلوم وكان حجم العينة المستخدمة أقل من 30 فإننا نستخدم اختبار  $t$  بالقانون:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

بدرجة حرية  $(d.f.) = n - 1$ .

#### ١-٥-١ خطوات اختبار الفروض للوسط الحسابي

**الخطوة الأولى** تحديد فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$ . وهذه الخطوة تتطلب أن نحدد أولاً المجتمع الذي سنجرى عليه الاختبار

**الخطوة الثانية** إيجاد تحديد القيمة الحرجة في اختبار  $z$  أو  $t$  المقابلة لمستوى المعنوية. ويجدر بنا هنا أن نذكر القيم الحرجة المقابلة للمستويات المعنوية الشهيرة في اختبار  $z$  وهي كما يلي:

مستوى المعنوية $\alpha$			نوع الاختبار	
0.01	0.05	0.10		
2.33	1.65	1.28	$H_0 : \mu \leq k, H_1 : \mu > k$	ذو ذيل جهة اليمين
-2.33	-1.65	-1.28	$H_0 : \mu \geq k, H_1 : \mu < k$	ذو ذيل جهة اليسار
$\pm 2.58$	$\pm 1.96$	$\pm 1.65$	$H_0 : \mu = k, H_1 : \mu \neq k$	ذو ذيلين

**الخطوة الثالثة** إجراء حسابات الاختبار الإحصائي باستخدام أحد القوانين:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} \quad \text{أو} \quad z = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} \quad \text{أو} \quad z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$



الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض عدم حسب وجود قيمة الاختبار في منطقة القبول أو منطقة الرفض

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء مثال (١)

يقرر باحث أن متوسط راتب المدرس عضو هيئة التدريس يزيد عن 42,000 جنيه سنوياً. اختيرت عينة من 30 مدرسا ووجد أن متوسط الرواتب هو 43,260 جنيهاً. اختبر صحة التقرير بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  إذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع يساوي 5,230 جنيهاً.

الخطوة الأولى تحديد فرض عدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$

(الادعاء)  $H_0: \mu \leq 42,000$ ,  $H_1: \mu > 42,000$

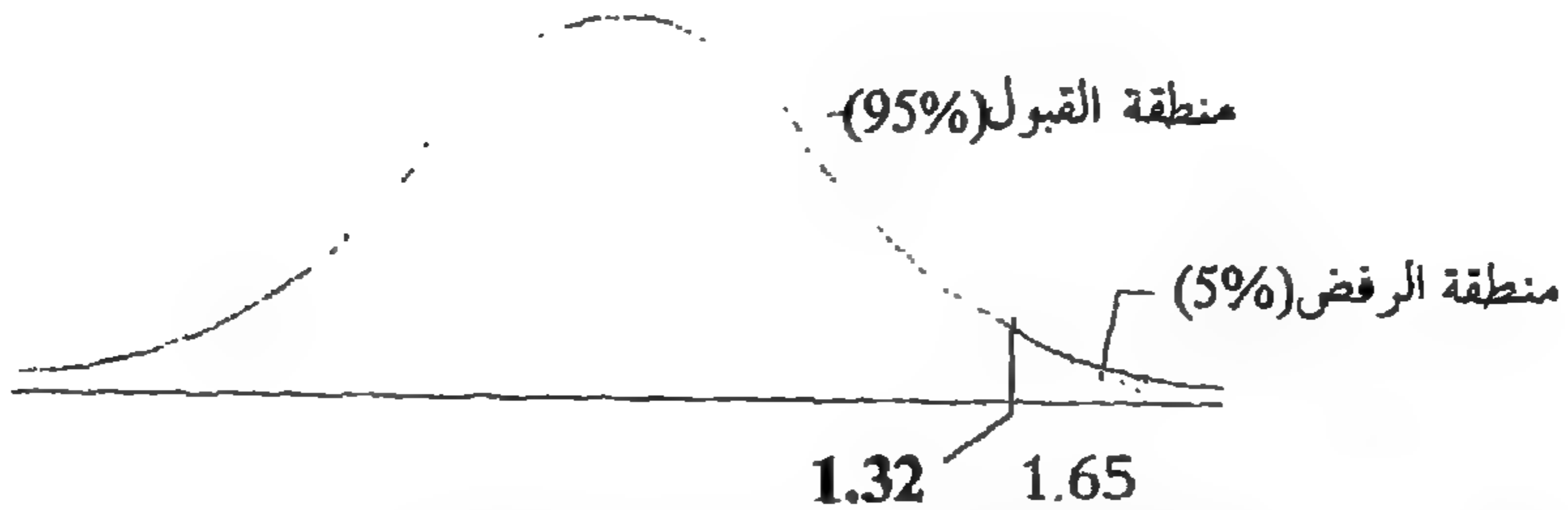
حيث أن الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، إذن فالاختبار المناسب هو اختبار  $z$  باستخدام القانون:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

وواضح أن الاختبار هنا هو اختبار ذو ذيل أيمن.

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

بالنظر في جدول القيم الحرجة نجد أن تلك القيمة هي 1.65



الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{43,260 - 42,000}{5230 / \sqrt{30}} = 1.32$$

واضح أن هذه القيمة في منطقة القبول.

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض عدم

حيث أن قيمة الاختبار وهي 1.32 تقع في منطقة القبول، إذن يتعين علينا قبول فرض عدم وبالتالي رفض الادعاء المذكور في التقرير.

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

لا يوجد دليل كاف لتبني ما قرره الباحث من أن راتب المدرس عضو هيئة التدريس يزيد عن 42,000 جنيه سنوياً.

مثال (٢)

يدعى منظم مباريات أن متوسط تكلفة الحذاء الرياضي أقل من 80 جنيها. اختيرت عينة من 36 حذاء من كتالوجات مختلفة ووجدت الأسعار كالآتي:

60	70	75	55	80	55	50	40	80
70	50	95	120	90	75	85	80	60
110	65	80	85	85	45	75	60	90
90	60	95	110	85	45	90	70	70

هل يوجد دليل كاف لتبني ما قرره المنظم بمستوى معنوية 0.10 ؟

الحل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$

(الادعاء)  $H_0: \mu \geq \text{L.E.}80$  ,  $H_1: \mu < \text{L.E.}80$

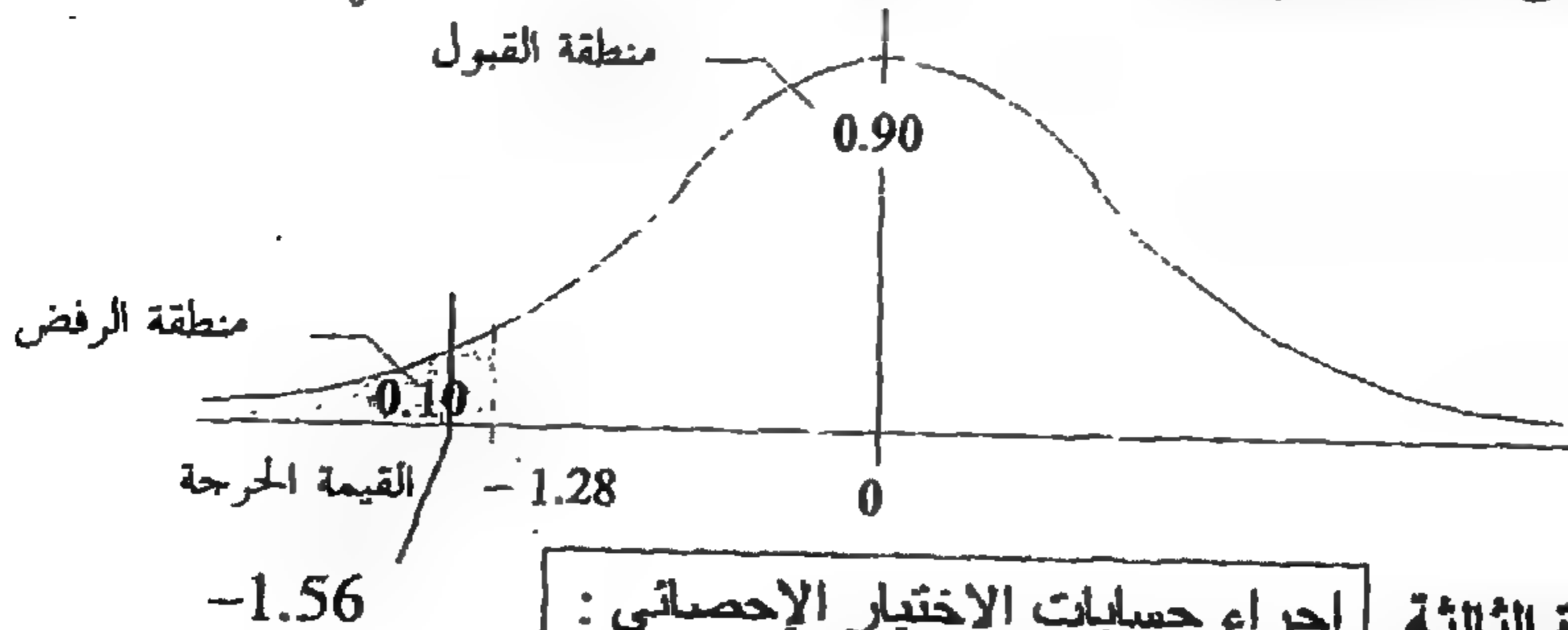
الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم، ولكن حجم العينة يساوي  $36 > 30$ . إذن فالاختبار المناسب هو اختبار  $z$  باستخدام القانون:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

وواضح أن الاختبار هنا هو اختبار ذو ذيل أيسر.

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة  $z$

بالنظر في جدول القيم الحرجة نجد أن تلك القيمة هي -1.28



الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي:

من بيانات العينة المعطاة تكون الجدول الآتي:

من بيانات العينة المعطاة فإن  $\bar{X} = 75$  ،  $s = 19.1$  وعليه فإن:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{75 - 80}{19.1 / \sqrt{36}} = \frac{-5}{3.2} = -1.56$$

وهذه القيمة تقع في منطقة الرفض.

### الخطوة الرابعة. قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن قيمة الاختبار وهي 1.56 - تقع في منطقة الرفض، إذن يتعين علينا رفض فرض العدم وبالتالي قبول ادعاء المنظم.

### الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأيد أو معارضة الادعاء

يوجد دليل كاف لتبنى ما قرره المنظم من أن تكلفة الحذاء الرياضى أقل من 80 جنيها.

مثال (٣)

تقرر مؤسسة لإعادة تأهيل مرضى الانهيار العصبى أن متوسط التكلفة للمريض هي 24,672 جنية. أخذ باحث عينة من 35 مريضاً فوجد أن متوسط التكلفة هو 25,226 جنية. فإذا كان الانحراف المعياري حسب معايير المؤسسة يساوى 3,251 جنيهاً فهل نستطيع أن نقرر أنه بمستوى معنوية 0.01 فإن متوسط تكلفة المريض تختلف عن 24,672 جنية؟

الحل

### الخطوة الأولى تحديد فرض العدم $H_0$ والفرض البديل $H_1$

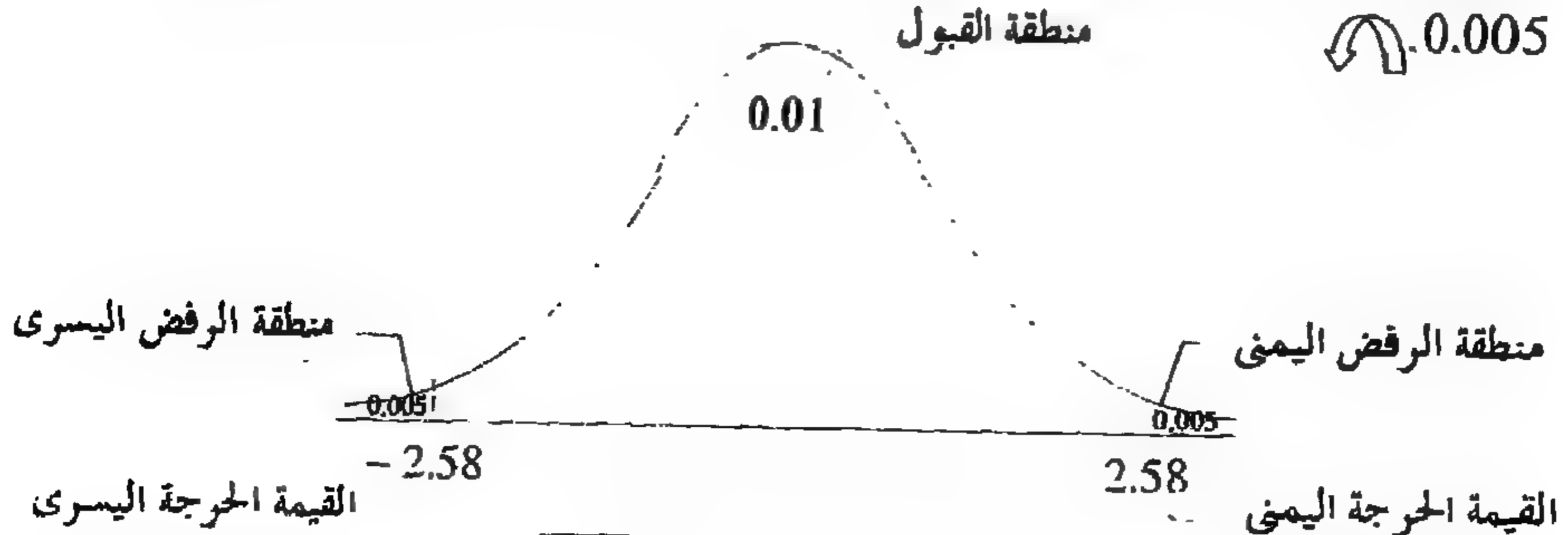
(الادعاء)  $H_0: \mu = \text{L.E. } 24,672$  ,  $H_1: \mu \neq \text{L.E. } 24,672$

الانحراف المعياري للمجتمع معلوم. إذن فالاختبار المناسب هو اختبار  $z$  باستخدام القانون:  
وواضح أن الاختبار ذو ذيلين.

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

### الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة.

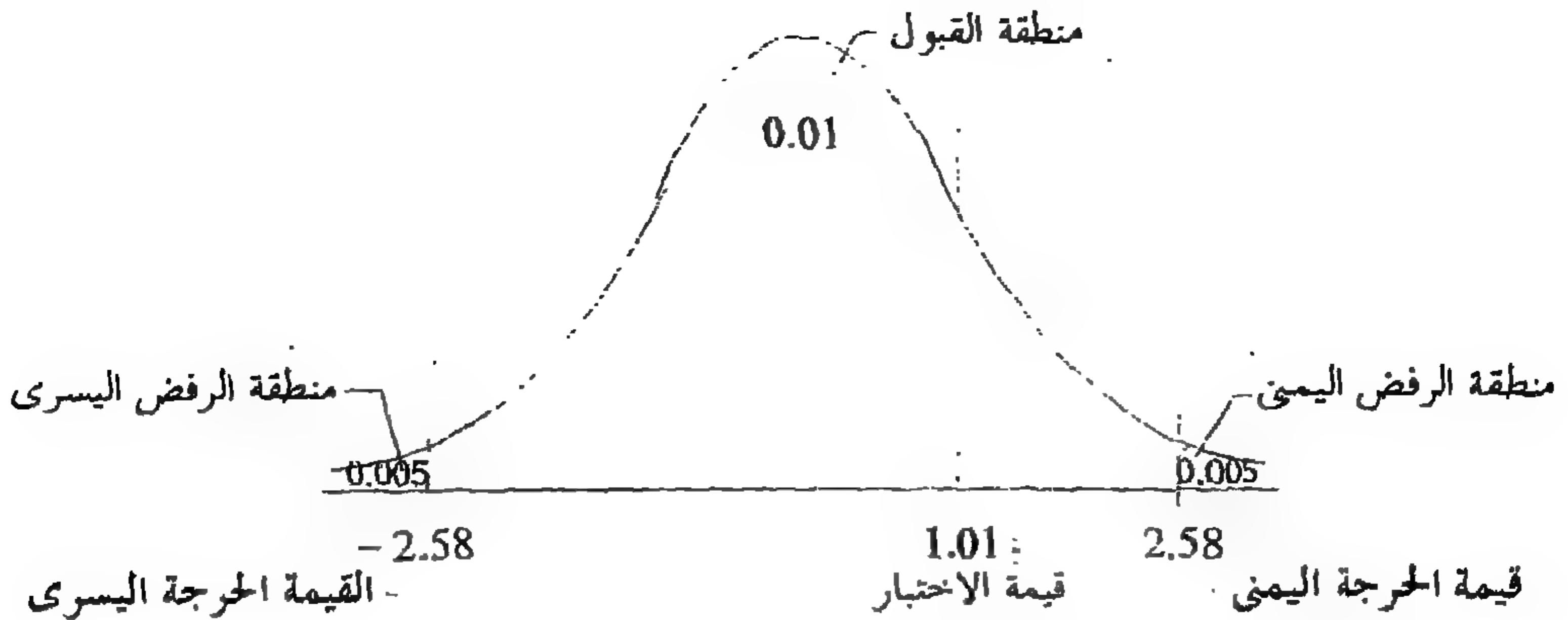
حيث أن الاختبار ذو ذيلين ومستوى معنوية كلى 1%، فإن مستوى المعنوية لكل من الذيلين يساوى 0.005. وقد عمل حساب هذا في جدول القيم الحرجة. وبالنظر في هذا الجدول نجد أن القيمتين الحرجتين هما  $\pm 2.58$  وهما القيمتان اللتان كنا سنحصل عليهما من جدول التوزيع الطبيعي عند البحث عن القيمة المناظرة لأقرب قيمة لـ



### الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{25,226 - 24,672}{3251 / \sqrt{35}} = 1.01$$

وهذه القيمة تقع بين القيمتين الحرجتين.



#### الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن قيمة الاختبار وهي 1.01 تقع بين القيمتين الحرجتين، إذن يتعين علينا قبول فرض العدم وبالتالي رفض الادعاء.

#### الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

لا يوجد دليل كاف لنقرر أن تكلفة المريض تختلف عن 24,672 جنيه.

#### مثال (٤)

تدعى شركة توظيف أن مرتب رئيسة تمريض يبدأ بـ 24,000 جنيه سنوياً. أخذت عينة من عشر رئيسات للتمريض فوجد أن متوسط مرتبهن السنوى هو 23,450 جنيه بانحراف معيارى 400 جنيه. هل يوجد دليل كاف بمستوى معنوية 0.05 لأن نرفض ادعاء شركة التوظيف؟

#### الحل

#### الخطوة الأولى تحديد فرض العدم $H_0$ والفرض البديل $H_1$

(الادعاء)  $H_0: \mu < \text{L.E. } 24,000$ ,  $H_1: \mu \geq \text{L.E. } 24,000$

الانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$  غير معلوم، وحجم العينة صغير، إذن فالاختبار المناسب هو اختبار  $t$  باستخدام القانون:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

وواضح أن الاختبار ذو ذيل أيمن.

#### الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

من جدول  $t$  عند درجة حرية 9 ومستوى معنوية 5% نجد أن القيمة الحرجة تساوى 1.83.



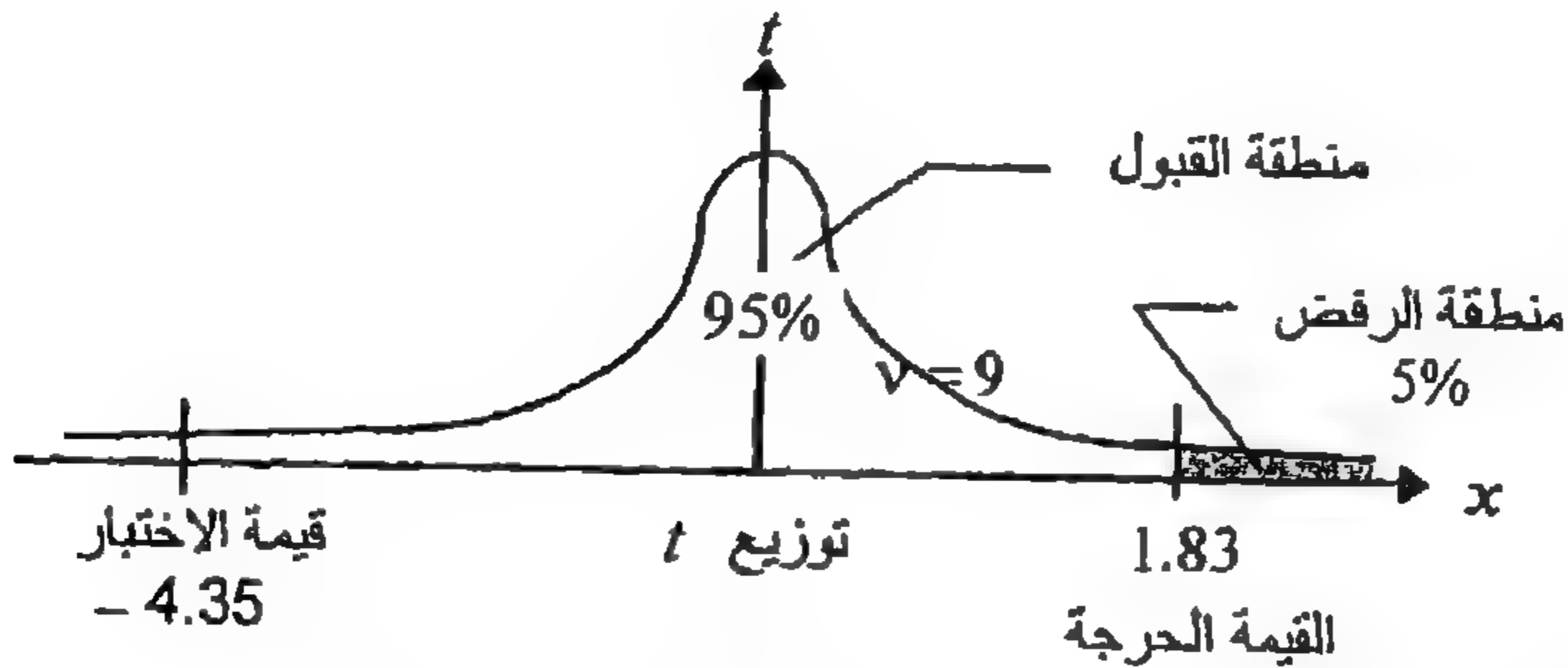
v	Two-tailed tests					v
	10%	5%	2%	1%	0.1%	
7	1.89	2.36	3.00	3.50	5.40	7
8	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04	8
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.78	9
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.59	10
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.44	11
12	1.78	2.18	2.68	3.05	4.32	12
	5%	2.5%	1%	0.5%	0.05%	
One-tailed tests						

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{23,450 - 24,000}{400 / \sqrt{10}} = -4.35$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن قيمة الاختبار وهي -4.35 تقع في منطقة القبول، إذن يتعين علينا قبول فرض العدم وبالتالي رفض الادعاء.



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأيد أو معارضة الادعاء

لا يوجد دليل كاف لأن نقبل الادعاء بأن الراتب السنوي لرئيسة التمريض يبدأ بـ 24,000 جنيه.

مثال (٥)

يدّعي خبير تعليم أن ما يحصل عليه المدرس المنتدب في بعض المدارس الريفية يقل عن 60 جنيهاً في اليوم. أخذت عينة من 8 مدارس في مناطق ريفية مختلفة فوجدت الرواتب اليومية للمدرّس المنتدب بها (بالجنيه) كالآتي:

55 60 55 70 55 60 56 60

عند مستوى معنوية 0.10 هل يوجد دليل كاف لأن نقبل ادعاء الخبير؟





الخطوة الأولى تحديد فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$

(الادعاء)  $H_0 : \mu \geq \text{L.E. } 60$ ,  $H_1 : \mu < \text{L.E. } 60$

الانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$  غير معلوم، وحجم العينة صغير، إذن فالاختبار المناسب هو اختبار  $t$  باستخدام القانون:  
وواضح أن الاختبار ذو ذيل أيسر.

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

من جدول  $t$  عند درجة حرية 7 ومستوى معنوية 0.10 نجد أن القيمة الحرجة تساوي -1.415

v	Two-tailed tests							v
	50%	20%	10%	5%	2%	1%	0.1%	
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869	5
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	6
7	0.711	1.415	1.895	2.365	3.098	3.499	5.408	7
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	8
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	9
v	25%	10%	5%	2.5%	1%	0.5%	0.05%	v
One-tailed tests								

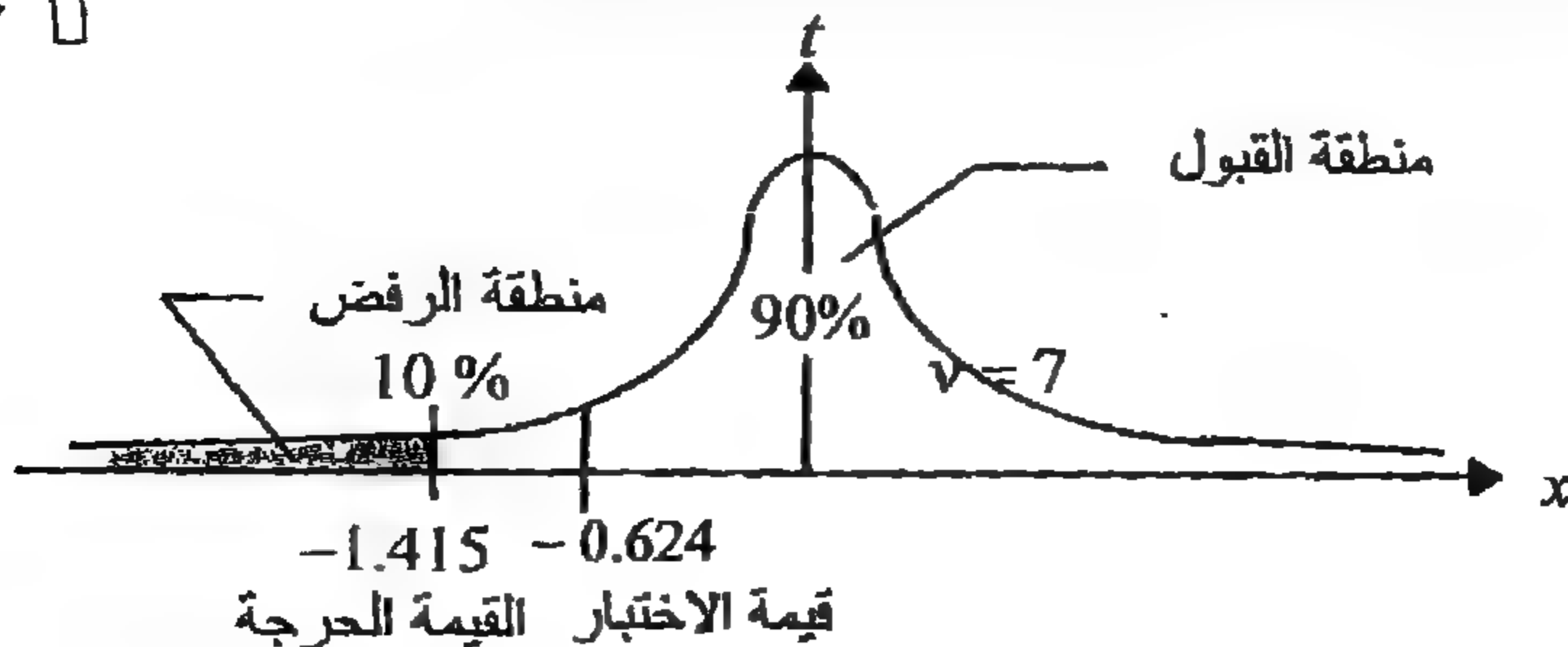
الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

باستخدام البيانات المعطاة لنا نجد أن  $s = 5.08$ .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{58.88 - 60}{5.08 / \sqrt{8}} = -0.624$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن القيمة تقع في منطقة القبول فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم.



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

لا يوجد دليل كاف لأن نقبل ادعاء الخبير بأن متوسط الراتب اليومي للمدرس المنتدب في المناطق الريفية أقل 60 جنيهاً.



في كثير من حالات اختبار الفروض نكون معنيين بالنسب. فمثلاً:

- قد تريد شركة متخصصة في تسويق الهدايا أن تعلم أن 59% من العملاء يشترون هدايا لأبائهم.
- قد تريد شركة مسابقات عن طريق التليفزيون معرفة أن 83% من المشاهدين الذين يشتركون في تلك المسابقات فوق سن 21 سنة.
- قد يريد باحث التثبث من أن 51% من الطلاب الجامعيين يشترون أطعمة جاهزة.
- قد يريد بيت من بيوت الأرياء أن يعرف أن 35% من العميلات يفضلن اللون الأحمر.

ويعتبر اختبار الفروض للنسبة من مجتمع ما بمثابة تجربة ذات الحدين عندما يكون هناك ناتجين وعندما يكون احتمال النجاح  $p$  لا يتغير عبر المحاولات المختلفة.

ومن المعلوم أن المتوسط في توزيع ذي الحدين هو  $np$  والانحراف المعياري  $\sqrt{npq}$  وحيث أن التوزيع الطبيعي يمكن أن يستخدم كتقريب لتوزيع ذي الحدين عندما يكون  $np \geq 5$  ،  $nq \geq 5$  فإن التوزيع الطبيعي يمكن أن يستخدم في اختبار النسبة. وسنستخدم القانون:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$

حيث  $\hat{p} = X/n$  (نسبة العينة)،  $p$  النسبة المفترضة في المجتمع،  $n$  حجم العينة. وهذا القانون يتبع القاعدة العامة:

القيمة المشاهدة - القيمة المتوقعة
القيمة الاختبارية = $\frac{\text{القيمة المشاهدة - القيمة المتوقعة}}{\text{الخطأ المعياري}}$

وستتبع نفس الخطوات المتبعة في اختبار فروض المتوسط الحسابي في اختبار النسبة. مثال (١)

يدعى خبير تربوي أن نسبة تسرب التلاميذ من التعليم الابتدائي في قرية ما هي 15%. أخذت عينة من 200 تلميذ ووجد أن 38 تلميذ منهم تركوا التعليم الابتدائي. باتخاذ مستوى معنوية 5% هل هناك دليل كاف على رفض ادعاء الخبير؟

الحل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$

$$H_0: p = 15\% \text{ (الادعاء)}, H_1: p \neq 15\%$$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

حيث أن الاختبار ذو ذيلين، فإن مستوى المعنوية لكل منهما يساوي 0.025. وقد عمل حساب ذلك في جدول القيم الحرجة. وبالنظر في هذا الجدول نجد أن القيمتين الحرجتين هما  $\pm 1.96$ .

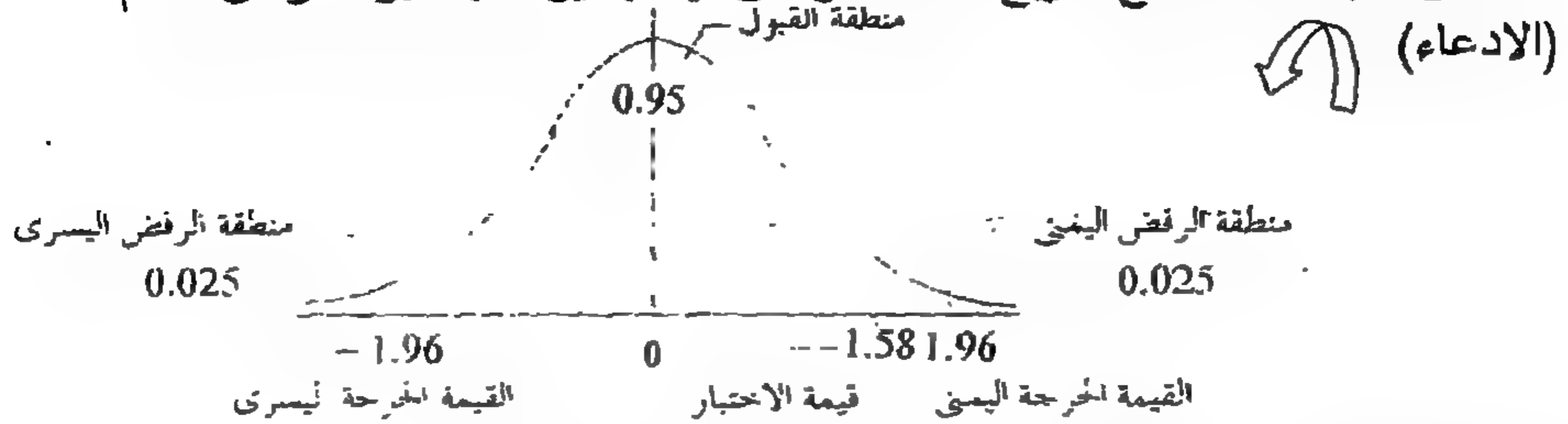
الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

$$q = 85\% , \quad p = 15\% , \quad \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{38}{200} = 0.19$$

$$\therefore z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0.19 - 0.15}{\sqrt{(0.15)(0.85)/200}} = 1.58$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن القيمة 1.58 تقع خارج منطقة الرفض فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء.

لا يوجد دليل كاف لأن نرفض ادعاء الخبير بأن نسبة تسرب التلاميذ من التعليم الابتدائي في القرية هي 15%.

مثال (٢)

نقول تقارير شركة اتصالات بأن 40% من مستخدميها يستخدمون خاصية الانتظار. اختير 100 مشترك ووجد أن 37 منهم يستخدمون خاصية الانتظار. هل هناك دليل كاف مستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  على أن نرفض ما ذكر في التقرير؟  
الحل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$

$$H_0: p = 0.40 \text{ (الادعاء) } , \quad H_1: p \neq 0.40$$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

حيث أن الاختبار ذو ذيلين، فإن مستوى المعنوية لكل منهما يساوي 0.025. وقد عمل حساب ذلك في جدول القيم الحرجة. وبالنظر في هذا الجدول نجد أن القيمتين الحرجتين هما  $\pm 2.58$ .

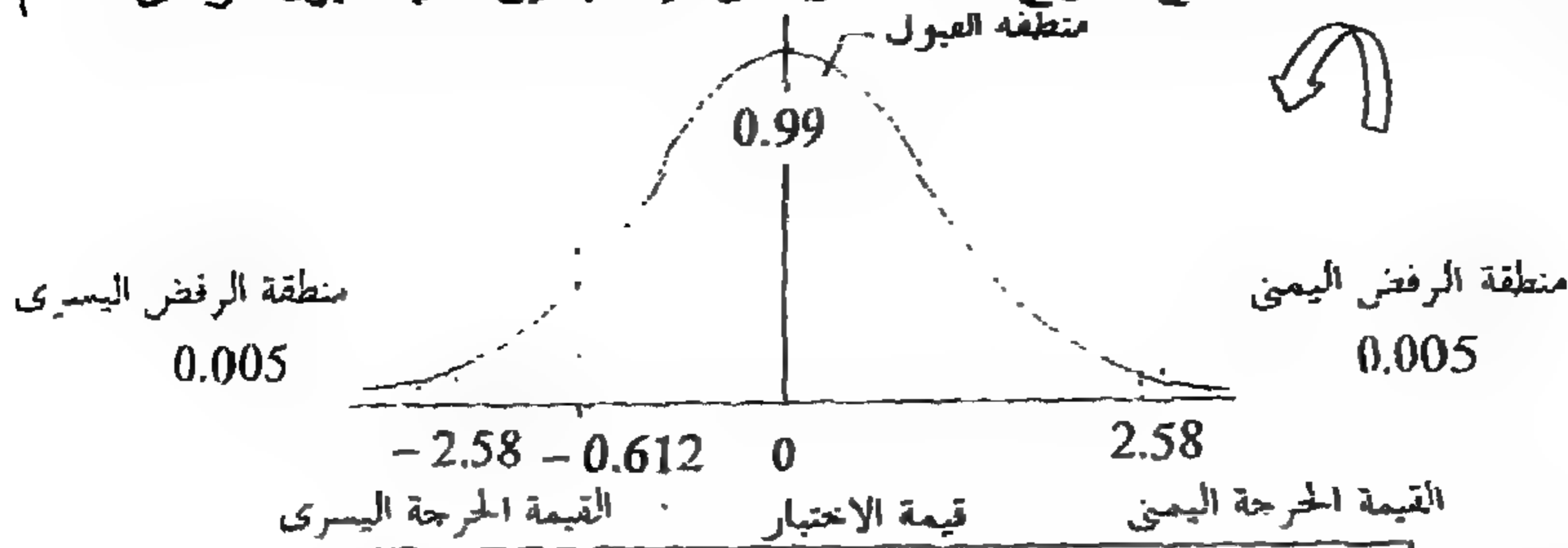
الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

$$q = 60\% , \quad p = 40\% , \quad \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{37}{100} = 0.37$$

$$\therefore z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0.37 - 0.40}{\sqrt{(0.40)(0.60)/100}} = -0.612$$

**الخطوة الرابعة** قبول أو رفض فرض العدم.

حيث أن القيمة 0.612 - تقع خارج منطقة الرفض فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم (الادعاء)



**الخطوة الخامسة** إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء.

لا يوجد دليل كاف لأن نرفض ما جاء في تقرير الشركة ادعاء الخبير بأن 40% من مشتركيها يستخدمون خاصية الانتظار.

مثال (٣)

كتبت إحدى الصحف أن نسبة 77% على الأقل من المجتمع يعارضون استبدال عملة الجنيه الورقية بأخرى معدنية. للتأكد من هذا الادعاء أخذ باحث إحصائي عينة من 80 شخص ووجد أن 55 منهم يعارضون استبدال عملة الجنيه الورقية بأخرى معدنية. باستخدام مستوى معنوية 0.01 هل يوجد دليل كاف لنصدق ادعاء الصحيفة؟

**الحل**

**الخطوة الأولى** تحديد فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$ .

$$H_0: p \geq 77\% \text{ (الادعاء)}, H_1: p < 77\%$$

**الخطوة الثانية** إيجاد تحديد القيمة الحرجة.

حيث أن الاختبار ذو ذيل جهة اليسار، فبالنظر في جدول القيم الحرجة نجد أن القيمة الحرجة هي -2.58.

**الخطوة الثالثة** إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

$$q = 23\% , p = 77\% , \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{55}{80} = 0.6875$$

$$\therefore z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0.6875 - 0.77}{\sqrt{(0.77)(0.23)/80}} = -0.75$$

**الخطوة الرابعة** قبول أو رفض فرض العدم.

حيث أن القيمة 0.75 - تقع خارج منطقة الرفض فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم (الادعاء).

**الخطوة الخامسة** إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء.

يتعين علينا تصديق ادعاء الصحيفة بأن 77% من المجتمع على الأقل يعارضون استبدال عملة الجنيه الورقية بأخرى معدنية.

## ٧ - ٤ اختبار الفروض للتباين

في اختبار الفروض لتباين مجتمع أو انحرافه المعياري نستخدم توزيع متبعين الخطوات الآتية:

**الخطوة الأولى:** تحديد فرض العدم والفرض البديل، ويكونان بإحدى الصيغ الآتية:

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 , H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad (\text{اختبار ذو ذيل أيمن})$$

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 , H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad (\text{اختبار ذو ذيل أيسر})$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 , H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad (\text{اختبار ذو ذيلين})$$

$\chi^2$

$v = 1$

$v = 5$

**الخطوة الثانية** إيجاد تحديد القيمة الحرجة:

الاختبار المناسب هنا هو اختبار  $\chi^2$  وتوزيع

$\chi^2$  يعتمد على درجة الحرية  $v = n - 1$

حيث  $n$  يساوي حجم العينة.

$v = 10$



$s^2$

**الخطوة الثالثة** إجراء حسابات الاختبار الإحصائي باستخدام القانون:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

حيث  $s^2$  تباين العينة ،  $\sigma^2$  تباين المجتمع ،  $v = n - 1$  درجة الحرية.

**الخطوة الرابعة:** قبول أو رفض فرض العدم حسب وجود قيمة الاختبار في منطقة القبول أو منطقة الرفض

**الخطوة الخامسة** إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

مثال (١)

وجد معلم أن تباين الدرجات في فصله المكون من 23 طالب وطالبة هو  $s^2 = 198$  في حين أن تباين الدرجات المعتاد هو  $\sigma^2 = 225$  وتريد أن نختبر بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  ادعاء المعلم أن تباين الدرجات في فصله يقل عن تباين المجتمع.

الحل

**الخطوة الأولى** تحديد فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$

$$H_0 : \sigma^2 \geq 225 , H_1 : \sigma^2 < 225 \quad (\text{الادعاء})$$



### إيجاد تحديد القيمة الحرجة

### الخطوة الثانية

حيث أن الاختبار ذي ذيل أيسر ومستوى المعنوية هو 0.05 فيجب أن نبحث في جدول  $\chi^2$  تحت القيمة  $1 - 0.05 = 0.95$  عند درجة حرية  $22 = 23 - 1 = n - 1$  فنجد القيمة الحرجة 12.3.

v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	24

### إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

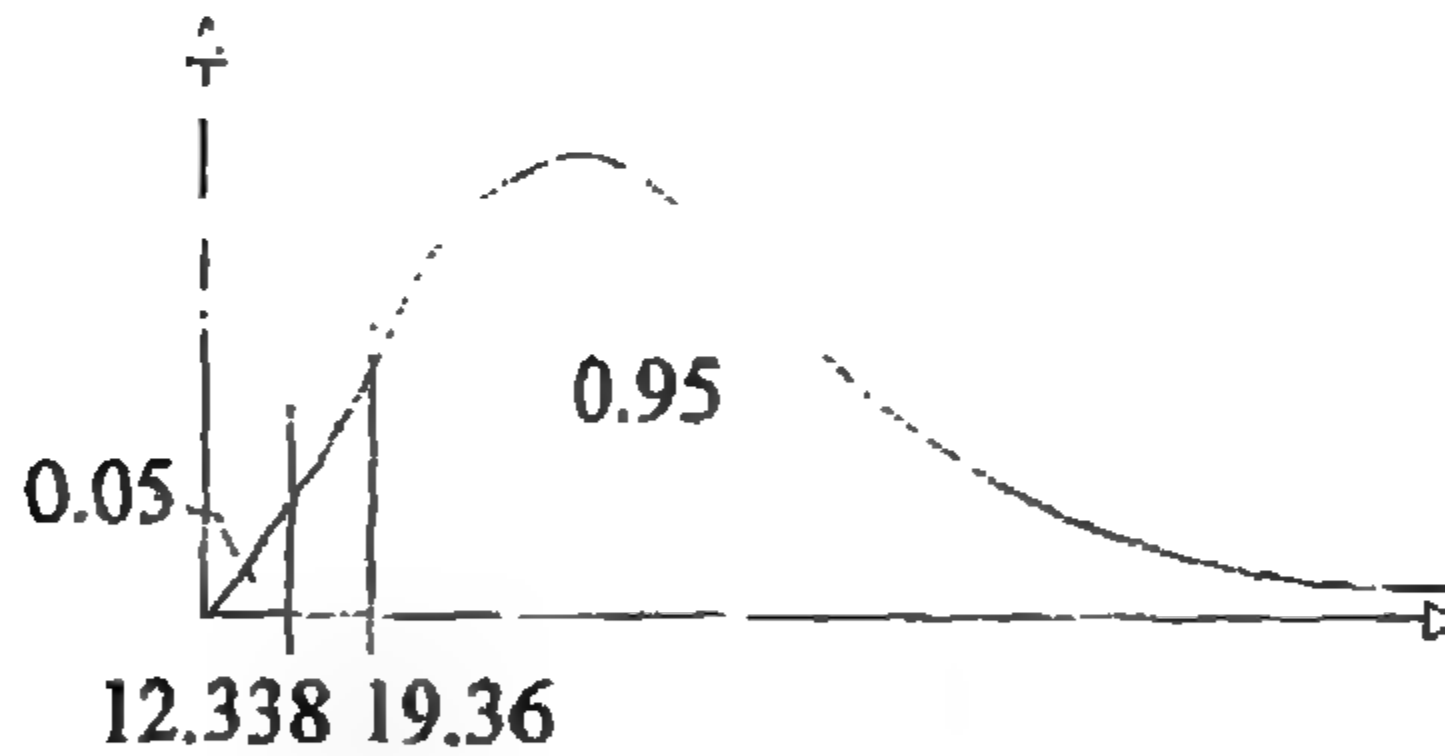
### الخطوة الثالثة

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(23-1)(198)}{225} = 19.36$$

### قبول أو رفض فرض العدم

### الخطوة الرابعة

حيث أن القيمة 19.36 تقع خارج منطقة الرفض فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم (الادعاء).



### إجابة السؤال المطروح وتأيد أو معارضة الادعاء

### الخطوة الخامسة

لا يوجد دليل كاف لأن نقبل الادعاء بأن تباين درجات الفصل أقل من تباين درجات المجتمع.

مثال (٢)

يعتقد المسئول الإداري في مستشفى أن الانحراف المعياري لعدد المرضى الذين يترددون على عيادة جراحة اليوم الواحد يزيد عن 8. الجدول الآتي يبين عدد المترددين على تلك العيادة على مدى 15 يوما:

25	30	5	15	18	42	16	9	10	12	12	38	8	14	27
----	----	---	----	----	----	----	---	----	----	----	----	---	----	----

عند مستوى معنوية 10% هل نستطيع أن نقبل ادعاء المسئول الإداري؟

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$

(الادعاء)  $H_0 : \sigma^2 \leq 64$  ,  $H_1 : \sigma^2 > 64$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

حيث أن الاختبار ذي ذيل أيمن ومستوى المعنوية هو 0.10 وحجم العينة 15 فيجب أن نبحث في جدول  $\chi^2$  تحت القيمة 0.05 عند درجة حرية  $14 = 15 - 1 = n - 1$  فنجد القيمة الحرجة 21.1. جدول  $\chi^2$

v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16

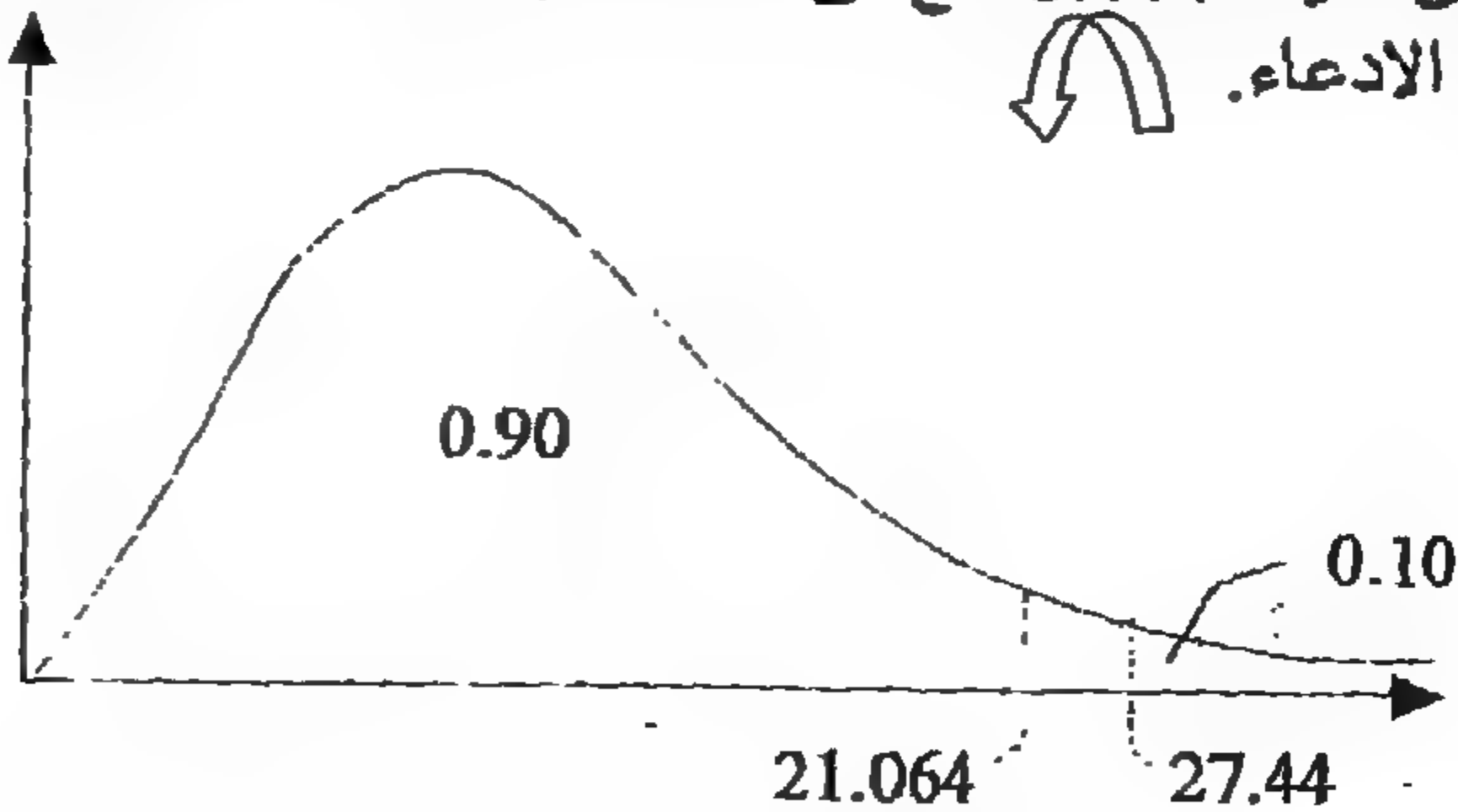
الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

من البيانات المعطاه بالجدول نجد أن التباين للعينة هو 125.44 . إذن:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(14)(125.44)}{64} = 27.44$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن القيمة 27.44 تقع في منطقة الرفض فإنه يتعين علينا رفض فرض العدم وقبول الادعاء.



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

يوجد دليل كاف لأن تقبل الادعاء بأن الانحراف المعياري لعدد المرضى الذين يترددون على عيادة جراحة اليوم الواحد يزيد عن 8.

تريد شركة لتصنيع السجائر أن تختبر الادعاء بأن تباين محتويات النيكوتين في إنتاج الشركة يساوى 0.644 (بمربع المليجرام). أخذت عينة من 20 سيجارة وحُسب الانحراف المعياري لمحتوى النيكوتين فوجد أنه يساوى 1.00 ميلليجرام. بمستوى معنوية 0.05 هل هناك دليل كاف لقبول الادعاء؟  
الحل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$

$$H_0 : \sigma^2 = 0.644 \text{ (الادعاء) } , H_1 : \sigma^2 \neq 0.644$$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

حيث أن الاختبار ذو ذيلين ومستوى المعنوية هو 0.05 وحجم العينة 20 فيجب أن نبحث في جدول  $\chi^2$  تحت القيمتين 0.025 ، 0.975 عند درجة حرية  $19 = 20 - 1$  فنجد القيمتين الحرجتين 8.91 ، 32.9  
جدول  $\chi^2$

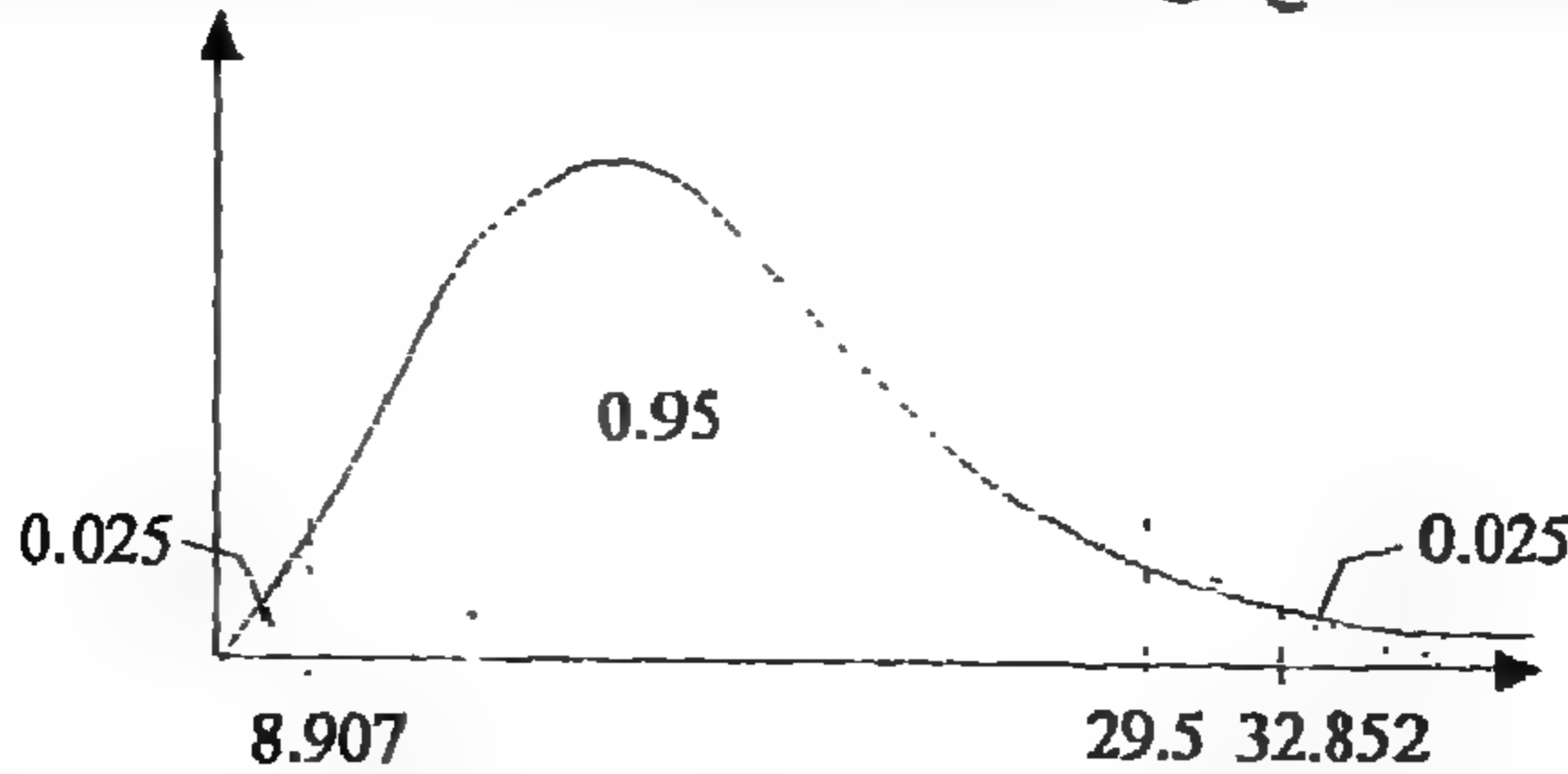
v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائي :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(19)(1.0)^2}{0.644} = 29.5$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم.

حيث أن القيمة 29.5 تقع في منطقة القبول فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم.



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء.

يوجد دليل كاف لأن نقبل الادعاء بأن تباين محتويات النيكوتين في إنتاج الشركة يساوى 0.644.

### تمارين ٤

١. عرّف "فرض العدم" ، "الفرض البديل" وأعط مثالا لكل منهما. ما الرموز المستخدمة لكل منهما؟
٢. ما المقصود بـ "النوع الأول للخطأ" ، "النوع الثاني للخطأ" وما الرموز المستخدمة لكل منهما؟ وما هي العلاقة بينهما؟
٣. ما المقصود بـ "الاختبار الإحصائي"؟ اشرح الفرق بين "الاختبار ذو الذيل الواحد" ، "الاختبار ذو الذيلين". ومتى نستخدم كلا منهما؟
٤. ما المقصود بـ "منطقة القبول" ، "منطقة الرفض"؟
٥. ما هي الخطوات المتبعة في اختبارات الفروض؟
٦. استخدم جدول التوزيع الطبيعي في إيجاد القيمة (القيم) الحرجة لكل من الحالات الآتية:

الآتية:

- (أ)  $\alpha = 0.01$  ، اختبار ذو ذيلين (ب)  $\alpha = 0.05$  ، اختبار ذو ذيل أيمن
  - (ج)  $\alpha = 0.005$  ، اختبار ذو ذيل أيسر (د)  $\alpha = 0.10$  ، اختبار ذو ذيل أيسر
  - (هـ)  $\alpha = 0.05$  ، اختبار ذو ذيلين (و)  $\alpha = 0.04$  ، اختبار ذو ذيل أيمن
  - (ز)  $\alpha = 0.01$  ، اختبار ذو ذيل أيسر (ح)  $\alpha = 0.10$  ، اختبار ذو ذيلين
  - (ط)  $\alpha = 0.02$  ، اختبار ذو ذيل أيمن (ي)  $\alpha = 0.02$  ، اختبار ذو ذيلين
٧. لكل من الادعاءات الآتية أكتب فرض العدم والفرض البديل:

- (أ) متوسط العمر لسائقي التاكسي في مدينة ما يساوي 36.3 عاما.
- (ب) متوسط الدخل السنوي للممرضات في ولاية أمريكية يساوي \$36,250 .
- (ج) متوسط أعمار لاعبي "الروديو" هو 27.6 عاما.
- (د) متوسط معدل ضربات القلب لمتسابقات الجري أقل من 72 ضربة في



الدقيقة.

(هـ) متوسط سعر أجهزة الفيديو أكبر من 100 جنيه.

(و) متوسط قيم فواتير الكهرباء الشهرية في عمارة من العمارات أكبر من 52 جنيه.

٨. في كل من الحالات الآتية أجز الخطوات:

(١) حدد الفرضين (العدم ، البديل) وبين الادعاء.

(٢) أوجد القيمة (القيم) الحرجة.

(٣) احسب قيمة (قيم) الاختبار.

(٤) اتخذ القرار (قبول أو رفض فرض عدم).

(٥) لخص النتيجة.

(أ) تقرر دراسة عن متوسط إيجار غرفة في فندق من فنادق الأقصر هو 200

جنيه لليلة واحدة. لاختبار هذا الادعاء أخذ باحث عينة من 30 غرفة

ووجد أن المتوسط هو 189 جنيه. فإذا علمت أن الانحراف المعياري

لمجتمع غرف الفنادق هو 8 جنيهات فهل على مستوى معنوية  $\alpha = 0.05$

يمكننا رفض الادعاء؟

(ب) قرر بنك اجتماعي أن متوسط السلف التي يدفعها البنك لمشروعات

شباب الخريجين هو مبلغ 32,620 جنيها في حين تقول رابطة الخريجين أن

المتوسط أقل من ذلك. وللتأكد من ذلك اخيرت عينة من 50 خريج

ووجد أن المتوسط هو 29,950 جنيها بانحراف معياري 11,000 جنيه.

فهل نستطيع بمسوى معنوية  $\alpha = 0.05$  أن نتبنى ادعاء رابطة الخريجين؟

(ج) يقدر باحث أن متوسط العائد لأكبر استثمارات هو مبلغ 24 مليون جنيه. أخذت عينة عشوائية من 50 شركة ووجد أن العائدات (بالمليون

جنيه) هي:

178	122	91	44	35	61	56	46	20	32
30	28	28	20	27	29	16	16	19	15
41	38	36	15	25	31	30	19	19	19
24	16	15	15	19	25	25	18	14	15
24	23	17	17	22	22	21	20	17	20

بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  هل يوجد دليل كاف على ادعاء الباحث؟

(د) قال تقرير رسمي أن متوسط دخل عضو هيئة التدريس بالجامعات يساوي

L.E.42,837 سنويا. يدعى عميد إحدى الكليات في جامعة خاصة أن

المتوسط عنده أكبر من ذلك. وللتأكد من ذلك اختيرت عينة عشوائية

من 44 عضو هيئة التدريس ووجد أن متوسط العينة هو L.E. 44,445

بأنحراف معياري L.E.3000. بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  هل العميد على

حق فيما ادعاه؟

(هـ) قال تقرير في الولايات المتحدة الأمريكية أن متوسط أعمار الطائرات

المدنية هو 14 عاما. اختار مديرا تنفيذيا في شركة طيران كبيرة عينة من

36 طائرة ووجد أن متوسط الأعمار للعينة هو 11.8 عاما بأنحراف

معياري 2.7 سنة. بمستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  هل يمكن أن نستنتج أن

متوسط الأعمار لطائرات شركته أقل من المتوسط القومي؟

(و) متوسط إنتاج القمح في بلد ما هو 1.5 طن في الفدان. جربت حبوب

جديدة في 60 مزرعة فوجد أن متوسط إنتاج الفدان هو 1.75 طن

بأنحراف معياري 225 كيلوجرام.

بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  هل يمكن أن نستنتج أن الإنتاجية زادت؟

(ز) أذاع تقرير أن متوسط دخول الآباء السنوى فى الجامعات الخاصة هو 91,600 جنيه. يدعى رئيس جامعة خاصة أن متوسط دخول الآباء السنوى فى جامعته أكبر من ذلك. اختيرت عينة عشوائية من 100 من الآباء فى جامعته فوجد أن متوسط الدخل هو 96,321 جنيه بانحراف معيارى 9555 جنيه. هل يمكن بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  أن نستنتج أن رئيس تلك الجامعة على حق؟

(ح) تقول التقارير الرسمية أن متوسط تكلفة الطالب الجامعى المقترب فى الولايات المتحدة من مصروفات دراسية وسكن ... إلخ هى \$19,410 سنويا. أخذت إحدى السفارات عينة من 40 مبعوثا لها فى جامعات مختلفة وحسبت التكلفة فأسفرت عن متوسط \$22,098 بانحراف معيارى \$6050. هل يمكن بمستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  أن نستنتج أن التكلفة قد زادت؟

(ى) تقول إحدى الإحصائيات أن متوسط عدد المدعوين فى حفلات الزفاف هو 125 فى المتوسط. أخذت عينة من 35 زفafa هذا العام فوجد أن المتوسط هو 110 مدعوا بانحراف معيارى 30 مدعو. هل يمكن بمستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  أن نستنتج أن المتوسط يزيد عما تقرره الإحصائية؟

(ك) تقول إحدى الإحصائيات أن متوسط دخل المدرس من الدروس الخصوصية هو 39,385 جنيها فى العام. أخذت عينة عشوائية من 50 مدرسا فوجد أن متوسط الدخل هو 41,680 جنيها بانحراف معيارى

5975 جنيه. هل يمكن بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  أن نستنتج أن المتوسط

يزيد عما تقررته الإحصائية؟

(ل) قرر رئيس أحد الأقسام في شركة تجارية أن متوسط قيمة فواتير المبيعات

هو \$20 ولكن محاسب الشركة لا يشاركه هذا الرأي ويقول أن المتوسط

أقل من ذلك. وللتدليل على ادعاء المحاسب اختار عينة عشوائية من 36

فاتورة مبيعات فوجد أن متوسطها  $\bar{X}$  هو \$19.2 وتباينها  $s^2$  هو 8. هل

يمكن بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  أن نصدق ادعاء المحاسب؟

### تمرين ٤ب

١. من أي الوجوه يشابه توزيع  $t$  التوزيع الطبيعي؟ ومن أي الوجوه يخالفه؟

٢. ما هي درجات الحرية بالنسبة لتوزيع  $t$ ؟

٣. أوجد القيمة (القيم) الحرجة في اختبار  $t$  لكل من الحالات الآتية:

(أ)  $n = 6$  ،  $\alpha = 0.01$  ، ذو ذيل أيسر (ب)  $n = 9$  ،  $\alpha = 0.025$  ، ذو ذيل أيمن

(ج)  $n = 15$  ،  $\alpha = 0.05$  ، ذو ذيلين (د)  $n = 10$  ،  $\alpha = 0.05$  ، ذو ذيل أيمن

(هـ)  $n = 18$  ،  $\alpha = 0.10$  ، ذو ذيلين (و)  $n = 23$  ،  $\alpha = 0.005$  ، ذو ذيل أيسر

(ز)  $n = 28$  ،  $\alpha = 0.01$  ، ذو ذيلين (ح)  $n = 17$  ،  $\alpha = 0.02$  ، ذو ذيلين

٤. قيس معدل سقوط المطر خلال أشهر الصيف في شمال القارة الأمريكية فوجد أنه

11.52 بوصة. اختار باحث 10 مدن في تلك المنطقة فوجد المعدل عام 2005

يساوي 7.42 بوصة بانحراف معياري 1.3 بوصة. هل يمكن بمستوى معنوية

$\alpha = 0.05$  أن نستنتج أن المعدل في المنطقة أقل من المعدل المعتاد؟

٥. تقول إحدى الإحصائيات أن متوسط مرتبات العاملين المؤهلين في المجال



الاكتواري هو \$40,000 سنويا. اختار أحد الإحصائيين عينة من 20 من  
الاكتواريين فوجد أن المتوسط هو \$43,228 بانحراف معياري \$4,000. هل يمكن  
بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  أن نستنتج أن الإحصائية خطأ؟

٦. يقدر إحصائي أمريكي أن متوسط ارتفاعات العمارات التي تحتوي على 30 طابقا  
فأكثر هو 700 قدم. أخذت عينة عشوائية من 10 عمارات من هذا النوع فجاءت  
ارتفاعاتها كالآتي:

485	511	841	725	615
520	535	635	616	582

هل يمكن بمستوى معنوية  $\alpha = 0.025$  أن نستنتج أن التقدير خطأ؟

٧. في عام من الأعوام وجد أن متوسط تكلفة الفيلم الواحد في الولايات المتحدة  
الأمريكية هي 54.8 مليون دولار. في العام التالي أخذت عينة من 15 فيلما من  
أفلام المغامرات فوجد أن متوسط تكلفتها 62.3 مليون دولار بتباين  
90.25 (مليون دولار)<sup>٢</sup>. هل يمكن بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  أن نستنتج أن إنتاج  
أفلام المغامرات يتكلف أكثر من المعتاد؟

٨. متوسط الأسعار الحرارية في قطعة الشيكولاتة وزن 50 جرام يساوي 110 سعرا.  
أخذت عينة عشوائية من 15 قطعة من ماركات مختلفة ووجد بها الأسعار الآتية:

100	125	150	160	185	125	155	110
145	160	100	150	140	135	120	

هل يمكن بمستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  أن نستنتج أن الأسعار الحرارية قد زادت  
عن المألوف؟

### تمرين ٤ ج

١. أعط ثلاثة أمثلة لاختبارات الفروض للنسب.
٢. لماذا تعتبر النسبة متغير ذي الحدين؟ عند اختبار الفروض للنسبة ما هي المتطلبات الضرورية؟
٣. ما هو المتوسط والانحراف المعياري للنسبة؟
٤. في دراسة حديثة للإسكان في المدن الجديدة وجد أن 64.7% من السكان يمتلكون مساكنهم. اتخذت عينة عشوائية من 150 مسكن وجد أن 92 من قاطنيها يمتلكون مساكنهم. هل يمكن بمستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  أن نستنتج أن النسبة اختلفت عن نتيجة الدراسة؟
٥. في دراسة وجد أن 48.8% من الأسر لها استثمارات في صورة أسهم. أخذت عينة من 250 عائلة وجد أن 142 منهم يتعاملون في الأسهم. عند أي مستوى للمعنوية يمكن أن نستنتج أن النسبة اختلفت عن الدراسة؟
٦. ذكر تقرير أن 40% من البالغين يمارسون هواية ألعاب الكمبيوتر في أوقات فراغهم. اختيرت عينة عشوائية من 180 بالغ فوجد أن 65 منهم يمارسون تلك الهواية. بمستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  هل هناك دليل كاف على أن نستنتج أن النسبة اختلفت عن النسبة التي في التقرير؟
٧. في تقرير رسمي ذكر أن نسبة الطبييات هي 27.9%. في دراسة عن الأطباء المعينين في جامعة كبيرة وجد من بين 120 من الأطباء المختارين عشوائيا توجد 45 طبيبة. بمستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  هل هناك دليل كاف على أن نستنتج أن نسبة الطبييات المعينات في الجامعة تفوق النسبة المذكورة في التقرير؟

### تمرين ٤د

١. باستخدام جدول  $\chi^2$  أوجد القيمة (القيم) الحرجة لكل من الحالات الآتية مبينا منطقة القبول ومنطقة الرفض. أكتب فرض العدم والفرض البديل. [افرض أن  $\sigma^2 = 225$ ]:

(أ)  $\alpha = 0.05$  ،  $n = 18$  ، ذو ذيل أيمن. (ب)  $\alpha = 0.10$  ،  $n = 23$  ، ذو ذيل أيسر.

(ج)  $\alpha = 0.05$  ،  $n = 15$  ، ذو ذيلين. (د)  $\alpha = 0.10$  ،  $n = 8$  ، ذو ذيلين.

(هـ)  $\alpha = 0.01$  ،  $n = 17$  ، ذو ذيل أيمن. (و)  $\alpha = 0.025$  ،  $n = 20$  ، ذو ذيل أيسر.

(ز)  $\alpha = 0.01$  ،  $n = 13$  ، ذو ذيلين. (ح)  $\alpha = 0.025$  ،  $n = 29$  ، ذو ذيل أيسر.

٢. يدعى خبير تغذية أن الانحراف المعياري لعدد السرعات الحرارية في ملعقة من صوص الكيك يساوي 60. أخذت عينة من الماركات المختلفة من الصوص وقيست السرعات الحرارية لها فوجدت كالاتي:

53	210	100	210	100	210	100	240	100
200	200	210	100	100	100	220	210	60

بمستوى معنوية  $\alpha = 0.10$  هل يمكن أن نرفض الادعاء؟

٣. اختيرت عينة عشوائية من 5 من عبوات العنب المعبأة للتصدير ووزنت فوجد أن تباين

العينة يساوي 6.5 كيلوجرام. عند مستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  هل يمكن أن نستنتج أن

تباين المجتمع أكبر من 6.2 كيلوجرام؟

٤. تدعى شركة أن تباين محتوى السكر في علب الزبادي الذي تنتجه هو 25 (يقاس

محتوى السكر بالملليجرام في الأوقية). اختيرت عينة عشوائية من 20 علبة وقيس محتوى

السكر بها فوجد أن تباينها يساوي 36. بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  هل يوجد دليل

كاف لرفض ادعاء الشركة؟

٥. أخذت عينة عشوائية من 20 نوع من أنواع المخبوزات المسكرة وقيست أسعارها الحرارية فأسفرت عن الآتى:

230	250	270	310	310	300	220	260	320	290
300	260	210	270	250	250	200	310	260	270

عند مستوى معنوية  $\alpha = 0.01$  هل يمكن أن نستنتج أن الانحراف المعياري لاسعار مجتمعات المخبوزات المسكرة يزيد عن 20 سعرا؟

٦. أخذت سبعة أيام عشوائية من شهر يوليو في مدينة من المدن وقيست درجات الحرارة العظمى فيها فوجدت كالآتى:

30	31	34	38	29	32	35
----	----	----	----	----	----	----

عند مستوى معنوية  $\alpha = 0.10$  هل يمكن أن نستنتج أن الانحراف المعياري لدرجات الحرارة العظمى في شهر يوليو أقل من 5 درجات؟

٧. يدعى خبير تربوى أن الانحراف المعياري لدرجات مادة الفيزياء في امتحانات الثانوية يساوى 5 درجات بينما يعارضه مستشار الفيزياء ويقول أن هذه القيمة أقل من الواقع. اختيرت 300 ورقة عشوائية وحسب انحراف درجاتها المعياري فوجد أنه 6 درجات. عند مستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  هل يمكن أن نستنتج أن تقرير المستشار صحيح؟

٨. هل بعض مطاعم السوق أكثر صحية من بعضها؟ أخذت عينة عشوائية من البطاطس المقلية التي تقدم في المطاعم وقيست كمية الدهن فيها بالجرام فأسفرت عن القيم الآتية:

15	10	13	17	15	11	22	17
18	10	24	20	18	13	15	21

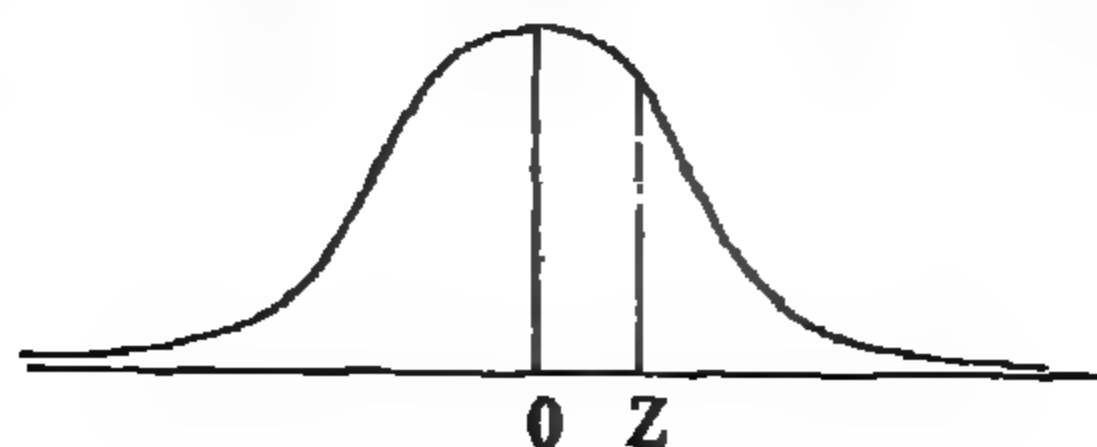
بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  هل هناك دليل كاف على أن الانحراف المعياري للبطاطس المقلية بالمطاعم يتعدى 4 جرامات؟



# الجدول الإحصائية

## جدول التوزيع الطبيعي

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1433	0.1480	0.1517
4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2703	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
10	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
11	0.3642	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
12	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
13	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
14	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
15	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
16	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
17	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
18	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
19	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
20	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
21	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
22	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
23	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
24	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
25	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
26	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
27	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
28	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
29	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
30	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

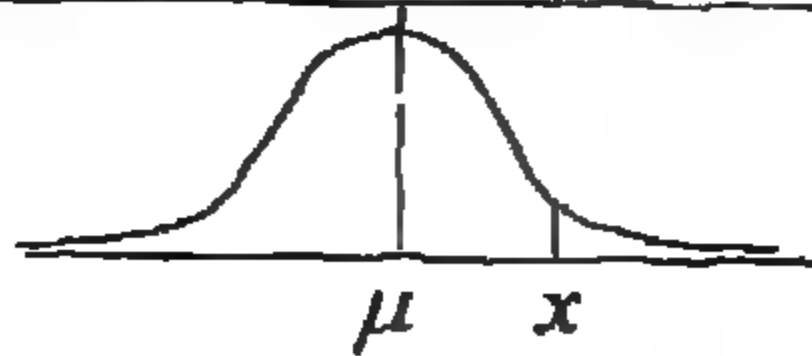






جدول قيم الذيل للتوزيع الطبيعي

$\frac{X - \mu}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2398	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1410	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0445	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.01228	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00748	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139



Tail Area	10%	5%	2.5 %	2%	1%	0.1 %	0.01%	0.001%
$(X - \mu)/\sigma$	1.2816	1.6449	1.9600	2.0537	2.3263	3.0902	3.7190	4.2649

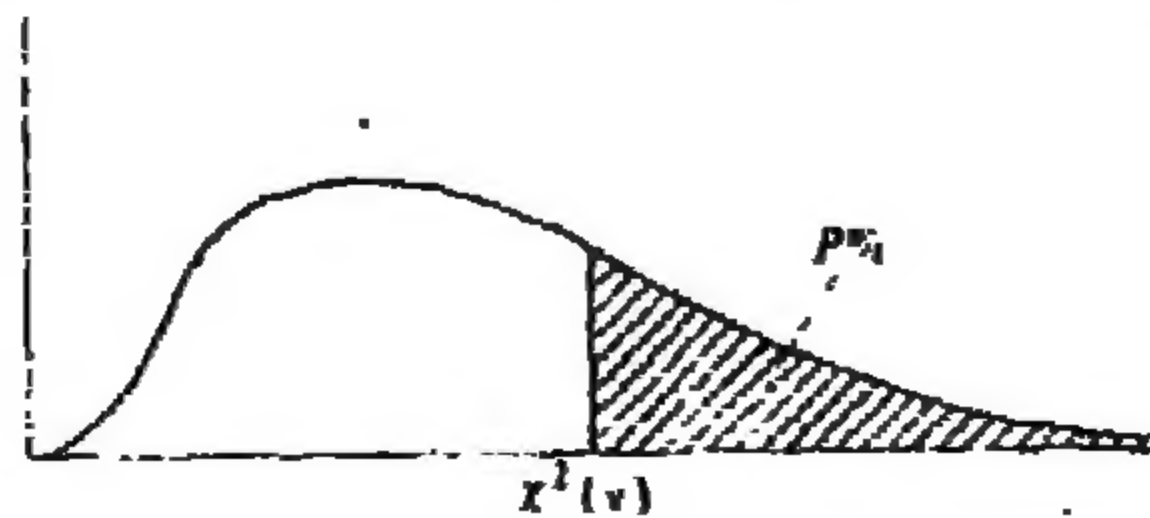


جدول توزيع  $t$




جدول توزيع  $\chi^2$  (( $\nu$  تساوى درجات الحرية))

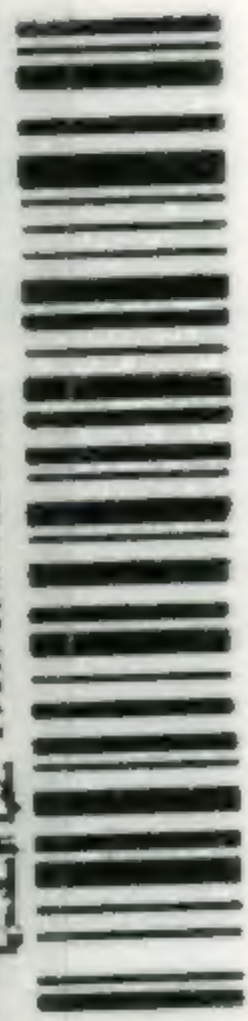
99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	$\nu$
0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	1
0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	2
0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	3
0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	4
0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	5
0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	6
0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	7
1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	8
1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	9
2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	10
2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	24
10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	25
11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	26
11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	27
12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	28
13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	29
13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	30





9.5  
149

 Bibliotheca Alexandrina



0942955